6 నుండి 10వ తరగతి విద్యార్థులకు, ఎ.పి.ఆర్.జె.సి. పాలిటెక్నిక్. టి.టి.సి., బి.ఇడి.,
ఆర్.ఆర్.బి., బి.యస్.ఆర్.బి., ఐసెట్., ఎఐయంసెట్ తదితర పోటీ పరీక్షలకు
ఉపయోగపడే గణిత విజ్ఞాన గ్రంథం.

గణిత విజ్ఞాన సర్వస్వం

(ప్రాథమిక విషయాలు, నిర్వచనాలు, సూత్రాలు-పటాలతో వివరణ)

Md. మంజూర్ అలి

M.Sc., B.Ed.,



విశాలాంధ్ర పబ్లిషింగ్ హౌస్

విజ్ఞాన భవన్, బ్యాంక్ స్ట్రీట్, అబిడ్స్,

హైదరాబాద్ - 500 001.

GANITHA VIGNANA SARWASWAYAM *by Md. Manzoor Ali*

ప్రచురణ నెం. : 2350/56

ప్రతులు : 1000

ప్రథమ ముద్రణ : జూన్, 2005

టైటిల్ డిజైన్ : రాజా

వెల : రూ॥ 100/-

ప్రతులకు : **విశాలాంధ్ర పబ్లిషింగ్ హౌస్**
విజ్ఞాన భవన్, అబిడ్స్, హైదరాబాద్ - 500 001.
E-mail: visalaandhraph@yahoo.com
విశాలాంధ్ర బుక్ హౌస్
(అబిడ్స్, సుల్తాన్‌బజార్) హైదరాబాద్,
విజయవాడ, గుంటూరు, అనంతపురం,
తిరుపతి, విశాఖపట్నం, హన్మకొండ, కాకినాడ.

ముద్రణ : **శ్రీ కళాంజలి గ్రాఫిక్స్**, హైదరాబాదు.

ముందు మాట

గణితశాస్త్రానికి పుట్టినిల్లు మన భారతదేశం. అయితే గణితం పేరు వినగానే విద్యార్థుల గుండెల్లో దడ ప్రారంభమవుతుంది. కారణం గణితముపై సరి అయిన అవగాహన విద్యార్థులకు లేకపోవడమే.

నిత్య జీవితానికి విలువనిచ్చేది, తెలివి తేటలను పెంచేది ఒక్క గణితమేనన్నది జగమెరిగిన సత్యం. ఈ శాస్త్రాల విలువలు పెంచేది కూడా గణితం. అందుకే **Mathematics is the mother of science** అంటారు. అటువంటి గణితశాస్త్రాన్ని 6 నుంచి 10 తరగతులకు బోధించు ఉపాధ్యాయుడు విద్యార్థికి ఎన్నో సులువైన మెళకువలను అందించాల్సి వుంటుంది. దానితోపాటు సబ్జక్ట్ పట్ల విద్యార్థులకు మక్కువ కలిగేటట్లు చేయాలి. కొద్దిపాటి క్రమశిక్షణాయుతమైన కృషితో విద్యార్థి ఉన్నట్లయితే ఆ విద్యార్థి సబ్జక్టులో ప్రావీణ్యత సంపాదించడం తథ్యం. ఎందుకంటే 6 నుంచి 10 తరగతుల విద్యార్థులే రేపటి దేశ భవితను కాపాడే శాస్త్ర సాంకేతిక వేత్తలు. అందువలన ఇలాంటి సదుద్దేశాన్ని మనసునందుంచుకుని 6 నుంచి 10 వరకు చదువుచున్న తెలుగుమీడియం విద్యార్థుల కొరకు నా పది సంవత్సరాల అనుభవానికి రూపకల్పనగా ఈ పుస్తకాన్ని మీ ముందుంచుతున్నాను.

6 నుంచి 10 తరగతులకు గణితసామాగ్రిని పెంపొందించే భాగంగా ఈ పుస్తకం రాయబడింది. విద్యార్థులలో ఆలోచనను, అధ్యయన నైపుణ్యాలను పెంపొందించడంలో గణితపాత్రను దృష్టియందుంచుకుని గణిత భావాలను అవగాహన చేసుకోవడానికి, అన్వేషించడానికి వీలైన విధానాన్ని ఈ పుస్తకంలో అవలంబించడమైంది.

మౌళిక భావనలు అర్థం చేయించడం గణిత బోధనలోని ప్రధాన ఉద్దేశ్యం. ఇందుకై ఈ పుస్తకంలో తగు శ్రద్ధ తీసుకోబడింది. ఈ పుస్తకంలో ప్రతీ భావనను విపులంగా విశదీకరించడానికి ప్రయత్నం చేయబడింది. వీటిచే ప్రేరితుడైన విద్యార్థి స్వయంగా అధ్యయనం చేసి తరగతిలో ప్రథముడిగా ఉండేట్లు కృషి చేయవచ్చు.

ప్రత్యేకంగా ఈ స్థాయిలోని విద్యార్థుల పదజాలాన్ని దృష్టిలో ఉంచుకుని అవసరమైన వాటిని ఆంగ్లములో అనువదించి సరళమైన, స్పష్టమైన భాషను పుస్తకంలో వాడడం జరిగింది.

ఈ పుస్తకం 6 నుండి 10 తరగతుల తెలుగు మీడియం విద్యార్థులకే కాక జూనియర్ కళాశాల విద్యార్థులకు; **Polytechnic; A.P.R.J.C., T.T.C., B.Ed., R.R.B., B.S.R.B., S.S.C., ICET...** వంటి ప్రవేశ పరీక్షలను రాయు విద్యార్థులకు ఉపయుక్తమైనది. ఈ పుస్తకం సంబంధిత అధ్యాపకులకు కూడా ఉపకరిస్తుందనుటలో అతిశయోక్తి వుండదు.

గణిత విద్యను మెరుగుపరచే విషయంలో సంబంధం కలవారందరు ఈ ప్రయత్నానికి దోహదం చేస్తారని ఆశించడమైంది. ఈ పుస్తకంలో ఉన్నతమైన వాటిని పొందుపరచడంలో ఎన్నో ప్రయత్నాలు చేసినను ఇంకా మెరుగుపరచడానికి కావలసిన సలహాలు స్వాగతిస్తున్నాం. విషయాన్ని ఆకళింపు చేసుకుని ఈ పుస్తకాన్ని ఉపయోగించుకుని మా కృషికి విజయాన్ని చేకూరుస్తారని భావిస్తూ.....

మీ

Md. మంజూర్ అలి, M.Sc., B.Ed.

స్కూల్ అసిస్టెంట్

ఇందులో....

పేజి

1. సంఖ్యలు - సంఖ్యామానాలు
(Numbers - Numbers System)

సంఖ్యల స్థాన విలువ పట్టిక (The place value chart of the numbers)

పది కోట్లు (10,00,00,000)	కోట్లు (1,00,00,000)	పది లక్షలు (10,00,000)	లక్షలు (1,00,000)	పదివేలు (10,000)	వేలు (1,000)	వందలు (100)	పదులు (10)	ఒకట్లు (1)
10^8	10^7	10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10	1

సంఖ్యల సంబంధాలు (Numbers Relations) :

1 లక్ష	=	100 వేలు
10 లక్షలు	=	1 మిలియన్
1 కోటి	=	10 మిలియన్లు
10 కోట్లు	=	100 మిలియన్లు

గమనిక :

మహాసముద్రము	=	10^{52}
తల్లక్షణము	=	10^{53}
అసంఖేయ	=	10^{140}

* ఆంగ్ల సంఖ్యామానం మిలియను - మిలియన్లు = 1 ట్రిలియన్ = 10^{12}

* 1 గూగోల్ = 10^{100}

* 1 గూగోల్‌ప్లెక్స్ = $10^{\text{గూగోల్}} = 10^{10^{100}}$

రోమన్ సంజ్ఞలు వాటికి సరిపడే హిందూ - అరబ్ సంజ్ఞలు

(Roman Numerals and their corresponding Indo-Arabic Numerals)

రోమన్ సంజ్ఞలు	I	V	X	L	C	D	M
హిందూ - అరబ్ సంజ్ఞలు	1	5	10	50	100	500	1000

Eg : CC = 200
LXVI = 66
LIX = 59

ద్విసంఖ్యామానము (Binary System) : 0, 1 అనే అంకెలను మాత్రమే వాడి సంఖ్యలను రాసే విధానాన్ని "ద్విసంఖ్యామానము" (లేదా) "అంకె 2 ఆధారంగా గల విధానము" అని అంటారు.

Eg : $11000_{(2)} = 56$
$1100_{(2)} = 12$

ద్విసంఖ్యామానంలో స్థాన విలువలను సూచించు పట్టిక

(The place value chart in the Binary System) :

అయిదు వందల పన్నెండ్ల స్థానము	రెండు వందల యాభై ఆరుల స్థానము	నూట ఇరవై ఎనిమిదుల స్థానము	అరవై నాలుగుల స్థానము	ముప్పైరెండ్ల స్థానము	పదహార్ల స్థానము	ఎనిమిదుల స్థానము	నాలుగుల స్థానము	రెండ్ల స్థానము	ఒకట్ల స్థానము
512	256	128	64	32	16	8	4	2	1
2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

దశాంశమానము (Decimal System) : 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 అనే పది అంకెలను వాడి సంఖ్యలను రాసే విధానాన్ని "దశాంశమానము" అందురు. దీనిని "పది ఆధారమైన విధానము" అని కూడా అంటారు.

Eg : $1101_{(2)} = 13$
$11001_{(2)} = 25$

సరి సంఖ్యలు (Even Numbers) : '2' చే నిశ్శేషంగా భాగించబడే సంఖ్యలను "సరి సంఖ్యలు" అని అంటారు.

Eg : 2, 4, 6, 8..........

* 'n' ఒక సహజ సంఖ్య అయితే "2n" ఒక సరిసంఖ్య అగును.

బేసి సంఖ్యలు (Odd Numbers) : '2' చే నిశ్శేషంగా భాగించబడని సంఖ్యలను "బేసి సంఖ్యలు" అని అంటారు.

* 'a' ఒక బేసి సంఖ్య; 'n' సహజ సంఖ్య అయితే a^n బేసి సంఖ్య అగును.

* 'n' సహజ సంఖ్య అయితే "2n-1" ఒక బేసి సంఖ్య అగును.

సహజ సంఖ్యలు (Natural Numbers) : లెక్కించడానికి ఉపయోగించే సంఖ్యలను "సహజ సంఖ్యలు" అందురు.

* సహజ సంఖ్యా సమితిని "N" తో సూచిస్తాం.

$N = \{1, 2, 3, 4, 5.........\}$

గమనిక : "N" లోని సంఖ్యలు అపరిమితం.

* మిక్కిలి చిన్న సహజ సంఖ్య "1"

పూర్ణాంకాలు (Whole Numbers) : సహజ సంఖ్యలతో పాటు "0" ను కూడా చేర్చగా వచ్చిన సంఖ్యలను "పూర్ణాంకాలు" అని అందురు.

* పూర్ణాంకాల సమూహాన్ని "w" తో సూచిస్తాము.

$W = \{0, 1, 2, 3, 4, 5.........\}$

గమనిక : w లోని సంఖ్యలు పరిమితం కాదు.

* మిక్కిలి చిన్న పూర్ణాంకము "0"

పూర్ణ సంఖ్యలు (Integers) : 1,2,3,4.......ధన సంఖ్యలు; ....,−3, −2, −1 ఋణ సంఖ్యలు మరియు సున్నాలను కలిపి "పూర్ణసంఖ్యలు" అని అందురు.

* పూర్ణ సంఖ్యలను "Z" తో సూచిస్తాము.

* పూర్ణ సంఖ్యల సమితి

$Z = \{.......,-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,..........\}$

* ధన పూర్ణ సంఖ్యల సమితి

$Z^+ = \{1, 2, 3, 4, ...\}$

* ఋణ పూర్ణసంఖ్యల సమితి

$Z^- = \{......., -4, -3, -2, -1\}$

* {0,1,2,3,4,.........} లను రుణేతర పూర్ణ సంఖ్యలు అని అంటారు.

* మిక్కిలి చిన్న; మిక్కిలి పెద్ద పూర్ణ సంఖ్య లేదు.

* −1, −2, −3, ...అనే సంఖ్యలను వరుసగా 1, 2, 3.....ల వ్యతిరేక సంఖ్యలు (లేదా సంకలన విలోమాలు) అని అంటారు.

* 1, 2, 3, ...అనే సంఖ్యలను వరుసగా −1, −2, −3.....ల వ్యతిరేక సంఖ్యలు అని అంటారు.

* ఒక జత పరస్పర వ్యతిరేక సంఖ్యల మొత్తము ఎప్పుడూ సున్నా అగును.

గమనిక : a, b అను పూర్ణ సంఖ్యలకు,

$a>b$ అయితే a అనునది b కు కుడివైపున ఉండును.

$a<b$ అయితే a అనునది b కుఎడమవైపున ఉండును.

పూర్ణ సంఖ్యల క్రమము (The order of relation is the set of integers) :

$.............-3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 <, ...$

అకరణీయ సంఖ్యలు (Rational Numbers) : a, b లు పూర్ణ సంఖ్యలై $b \neq 0$ అయితే $\frac{a}{b}$ రూపంలో ఉన్న సంఖ్యలను "అకరణీయ సంఖ్యలు" అని అంటారు.

* అకరణీయ సంఖ్యల సమూహాన్ని "Q" తో సూచిస్తాము.

* ఒక ధన అకరణీయ సంఖ్య, రుణ అకరణీయ సంఖ్య కంటే ఎప్పుడూ పెద్దది,

* ప్రతి రుణ అకరణీయ సంఖ్య '0' కంటే తక్కువ.

* ప్రతి ధన అకరణీయ సంఖ్య '0' కంటే ఎక్కువ.

* రెండు అకరణీయ సంఖ్యల హారాలు సమానమైన, తక్కువ లవంకల అకరణీయ సంఖ్య రెండవ దానికన్నా చిన్నది.

Eg : $\frac{-7}{8} < \frac{-3}{8}$; $\frac{4}{7} < \frac{6}{7}$

* రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మొత్తము (లేదా) భేదము (లేదా) లబ్ధము (లేదా) భాగాహారము అకరణీయ సంఖ్యయే అగును.

* ఏ రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్యనైనా అనంతమైన అకరణీయ సంఖ్యలు ఉంటాయి.

కరణీయ సంఖ్యలు (Irrational Numbers) : p, q లు పూర్ణ సంఖ్యలై $\frac{p}{q}$ రూపంలో $(q \neq 0)$ వ్రాయడానికి వీలుగా లేని సంఖ్యలను "కరణీయ సంఖ్యలు" అంటారు.

$$Q^1 = \left\{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \frac{\sqrt{7}}{3}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{5}}, 2+\sqrt{3}, \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}, ...\right\}$$

వాస్తవ సంఖ్యా సమితి (Real Numbers Set) : కరణీయ సంఖ్యలు, అకరణీయ సంఖ్యలను కలిగి ఉన్న సమితిని "వాస్తవ సంఖ్యా సమితి" అని అంటారు.

* వాస్తవ సంఖ్యా సమితిని R తో సూచిస్తాము.

* "0" రుణేతర వాస్తవ సంఖ్య.

* ధన వాస్తవ సంఖ్యల వర్గాలు ధనవాస్తవ సంఖ్యలే.

* ఋణ వాస్తవ సంఖ్యల వర్గాలు ధనవాస్తవ సంఖ్యలే.

* వర్గం ఋణ సంఖ్య అయ్యే వాస్తవ సంఖ్య లేదు.

* -1 యొక్క వర్గమూలాన్ని "i" అనే కల్పిత సంఖ్యతో సూచిస్తాము.

$$\boxed{\sqrt{-1} = i} \quad ; \quad \boxed{i^2 = -1}$$

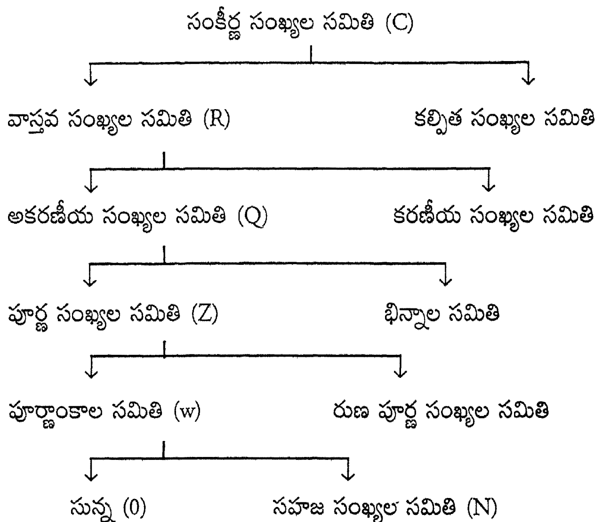
* -4 యొక్క వర్గమూలాలు -2i; 2i అవుతాయి.

సంకీర్ణ సంఖ్యలు (Complex Numbers) : $a, b \in R$ అవుతూ "a+ib" రూపంలో గల సంఖ్యలను "సంకీర్ణ సంఖ్యలు" అందురు.

* సంకీర్ణ సంఖ్యల సమితిని "C" తో సూచిస్తాము.

* $$C = \{a + ib/a, b \in R\}$$

సంఖ్యల వివరణ



* $N \subset W \subset Z \subset Q \subset R \subset C$

** **పూర్ణాంకాల సంకలన ధర్మాలు** (Additive Properties of Whole Numbers) : పూర్ణాంకాలు సంకలనము దృష్ట్యా

(i) సంవృత ధర్మము (ii) వినిమయ (స్థిత్యంతర) ధర్మము
(iii) సహచర ధర్మము (iv) తత్సమ ధర్మాలను పాటించును.

(i) **సంవృత ధర్మము** (Closure Property) : a, b అనే రెండు పూర్ణాంకాల మొత్తము "a+b" కూడా పూర్ణాంకమే. ఈ ధర్మాన్ని పూర్ణాంకాల "సంకలన సంవృత ధర్మం" అని అందురు.

Ex : $5 + 9 = 14$

(ii) **వినిమయ (స్థిత్యంతర) ధర్మము** (Commutative Property) : a, b అనే పూర్ణాంకాలకు $a+b = b+a$ అగును. ఈ ధర్మాన్ని పూర్ణాంకాలలో "సంకలన వినిమయ (స్థిత్యంతర) ధర్మం" అని అందురు.

Ex : $5 + 10 = 10 + 5 = 15$.

(iii) **సహచర ధర్మము** (Associative Property) : a, b, c అనే ఏవేని మూడు పూర్ణాంకాలకు $a+(b+c) = (a+b)+c$ అగును. ఈ ధర్మాన్ని పూర్ణాంకాలలో "సంకలన సహచర ధర్మం" అని అందురు.

Ex : $5 + (6 + 7) = (5 + 6) + 7 = 18$

(iv) **తత్సమ ధర్మము** (Identity Property) : 'a' అనే ఏదేని పూర్ణాంకానికి $a+0 = 0+a = a$. ఈ ధర్మాన్ని "సంకలన తత్సమ ధర్మం" అని అందురు.

'0' ను సంకలన తత్సమాంశము అందురు.

Ex : $5 + 0 = 5$

** **పూర్ణాంకాల గుణకార ధర్మాలు** (Multiplicative Properties of Whole Numbers) : పూర్ణాంకాలు గుణకారము దృష్ట్యా

(i) సంవృత ధర్మము

(ii) వినిమయ (స్థిత్యంతర) ధర్మము

(iii) సహచర ధర్మము

(iv) తత్సమ ధర్మం

(v) సున్నా ధర్మం

(vi) విభాగ ధర్మాలను పాటించును.

(i) **సంవృత ధర్మము** (Closure Property) : a, b అనే ఏవేని రెండు పూర్ణాంకాల లబ్ధము "a.b" కూడా ఒక పూర్ణాంకము అగును. ఈ ధర్మాన్ని పూర్ణాంకాల "గుణకార సంవృత ధర్మం" అని అందురు.

Ex : $5 \times 15 = 75$

(ii) **వినిమయ (స్థిత్యంతర) ధర్మము** (Commutative Property) : ఏవేని రెండు పూర్ణాంకాలు a, b లకు $a \times b = b \times a$ అగును. ఈ ధర్మాన్ని పూర్ణాంకాలలో "గుణకార వినిమయ (స్థిత్యంతర) ధర్మం" అని అందురు.

Ex : $3 \times 2 = 2 \times 3 = 6$

(iii) **సహచర ధర్మము** (Associative Property) : ఏవేని మూడు పూర్ణాంకాలు a, b, c లకు $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$ అగును. ఈ ధర్మాన్ని పూర్ణాంకాలలో "గుణకార సహచర ధర్మం" అని అందురు.

Ex : $2 \times (3 \times 5) = (2 \times 3) \times 5 = 30$

(iv) **తత్సమ ధర్మము** (Identity Property) : "a" అనే ఏ పూర్ణాంకానికైనా $a \times 1 = 1 \times a = a$ అగును. ఇచ్చట '1' ను గుణకార తత్సమము అందురు.

Ex : $1 \times 11 = 11$

(vi) **సున్నా ధర్మము** (Zero Property) : "a" అనే ఏ పూర్ణాంకానికైనా $a \times 0 = 0 \times a = 0$ అగును. ఈ ధర్మాన్ని పూర్ణాంకాలలో "గుణకార సున్నా ధర్మం" అని అందురు.

Ex : $0 \times 5 = 0; 0 \times 0 = 0$

గమనిక : $a \times b = 0$ అయితే $a = 0$ (లేదా) $b = 0$ (లేదా) $a = b = 0$.

కూడికపై గుణకార విభాగ ధర్మం (Multiplication is distributive over Addition) : ఏవేని మూడు పూర్ణాంకాలు a, b, c లకు $a \times (b + c) = (a \times b)+(a \times c)$ అగును. ఈ ధర్మాన్ని కూడికపై "గుణకార విభాగ ధర్మం" అని అందురు.

Ex : $2 \times (3 + 5) = (2 \times 3) + (2 \times 5) = 16$.

* పూర్ణాంకాలలో తీసివేతకు "సంవృత ధర్మం" వర్తించదు.

గమనిక : a, b, c లు పూర్ణాంకాలు అయితే

(i) a-b ఒక పూర్ణాంకము కానవసరంలేదు.

(ii) $a - b \neq b - a \ (a \neq b)$

(iii) సాధారణంగా $a - (b - c) \neq (a - b) - c$

(iv) $a \div b$ పూర్ణాంకము కావచ్చు. కాకపోవచ్చు.

(v) $a \div b = b \div a \ (a \neq 0; b \neq 0)$ అయితే a=b

(vi) సాధారణంగా $a \div b \neq b \div a \ (\because a \neq 0; b \neq 0)$

(vii) సాధారణంగా $a \div (b \div c) \neq (a \div b) \div c$

(viii) $0 \div a = 0 \ (a \neq 0)$

(ix) $a \div 1 = a$

* పూర్ణాంకాలలో "సున్న" చే భాగహారము నిర్వచించబడలేదు.

* $a \neq 0$, b, x అనే మూడు పూర్ణాంకాలకు $b \div a = x$ అయితే $a \times x = b$ అవుతుంది.

కారణాంకాలు (లేదా) భాజకాలు (Factors or Divisors) : ఇచ్చిన ఒక సంఖ్యను శేషం లేకుండా భాగించే ప్రతి సహజ సంఖ్యను ఇచ్చిన సంఖ్యకు "కారణాంకము" అని అందురు. "కారణాంకమును భాజకము" అని కూడా అందురు.

ఉదా : 1,3, 5, 15 లలో ప్రతి ఒక సంఖ్య 15 ను శేషం లేకుండా భాగిస్తుంది. కావున 1, 3, 5, 15 లను భాజకాలు అందురు. ఇదే విధంగా 1, 3, 5, 15 లలో ప్రతి సంఖ్య 15 కు "కారణాంకము" అవుతుంది.

* 'a' కు 'b' కారణాంకమై, 'b' కు 'a' కారణాంకము అయితే a=b అవుతుంది.

గుణిజాలు (Multiples) : ఒక సంఖ్యను 1, 2, 3, 4... .... అనే సంఖ్యలతో గుణించగా వచ్చిన లబ్ధాలను, ఆ సంఖ్య "గుణిజాలు" అని అందురు.

ఉదా : 5, 10, 15, 20, 25.........లను 5 యొక్క "గుణిజాలు" అని అందురు.

గమనిక : a, b అనే సహజ సంఖ్యల లబ్ధము 'c' అయితే $a \times b = c$. అప్పుడు $c \div b = a$ అనేది సత్యమగును.

* $a \times b = c$ లో a, b లను కారణాంకములనియు, c ను లబ్ధము అని అందురు.

* $c \div b = a$ లో c ను విభాజ్యము అని,

b ను విభాజకము అని,

a ను భాగఫలము అని అందురు.

* ఒక సంఖ్య కారణాంకము ఆ సంఖ్యను నిశ్శేషంగా భాగిస్తుంది.

* ఒక సంఖ్య గుణిజాన్ని ఆ సంఖ్య నిశ్శేషంగా భాగిస్తుంది.

* ప్రతి సంఖ్య దానికి అదే కారణాంకము; గుణిజము.

* "1" ప్రతి సంఖ్యకు కారణాంకము అవుతుంది.

ప్రధాన సంఖ్య (Prime Number) : "1" మరియు దానికదే కారణాంకాలుగా గల సహజ సంఖ్యను "ప్రధాన సంఖ్య" అని అంటారు.

ఉదా : 2,3, 5, 7, 11, 13.........................

గమనిక : **25 కంటె తక్కువ గల ప్రధాన సంఖ్యల సంఖ్య = 9**

50 కంటె తక్కువ గల ప్రధాన సంఖ్యల సంఖ్య = 15

75 కంటె తక్కువ గల ప్రధాన సంఖ్యల సంఖ్య = 19

100 కంటె తక్కువ గల ప్రధాన సంఖ్యల సంఖ్య = 25

సంయుక్త సంఖ్యలు (Composite Numbers) : 1; ఇచ్చిన సంఖ్యలే కాక ఇతర సంఖ్యలు కారణాంకాలుగా గల సంఖ్యలను "సంయుక్త సంఖ్యలు" అని అందురు.

ఉదా : 4, 6, 8, 9, 10, 12.................మొదలైనవి సంయుక్త సంఖ్యలు.

* సంయుక్త సంఖ్యలకు కనీసము మూడు కారణాంకాలు అయినా ఉండును.

గమనిక : "1" ప్రధాన సంఖ్య కాదు; సంయుక్త సంఖ్య కాదు.

కవల ప్రధాన సంఖ్యలు (Twin Prime Numbers) : "2" భేదంగా గల ప్రధాన సంఖ్యల జతలను "కవల ప్రధాన సంఖ్యలు" అని అంటారు.

ఉదా : (3,5); (5, 7); (11, 13); (17, 19).........లు కవల ప్రధాన సంఖ్యలు.

పరస్పర ప్రధాన సంఖ్యలు (Relatively Prime Numbers) : రెండు సంఖ్యలకు "1" తప్ప వేరే సామాన్య కారణాంకాలు లేకుంటే వాటిని "పరస్పర ప్రధాన సంఖ్యలు" లేదా "సాపేక్ష ప్రధాన సంఖ్యలు" అని అందురు.

ఉదా : 16, 47 లు సాపేక్ష ప్రధాన సంఖ్యలు.

* పరస్పర ప్రధాన సంఖ్యల సామాన్య కారణాంకము (ఉమ్మడి కారణాంకము) "1".

**** 2, 3, 4,, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ల భాజనీయ సూత్రాలు** (Criteria for divisibility by 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11) :

(i) ఒక సహజ సంఖ్య ఒకట్ల స్థానములో '2, 4, 6, 8' (లేదా) '0' ఉంటే ఆ సంఖ్య "2" చే నిశ్శేషంగా భాగింపబడుతుంది.

(ii) ఒక సహజ సంఖ్యలోని అంకెల మొత్తము మూడు (3) చే భాగింపబడితే ఆ సంఖ్య "3" చే నిశ్శేషంగా భాగింపబడుతుంది.

(iii) ఒక సహజ సంఖ్యలోని చివరి రెండు స్థానాలు (పదుల, ఒకట్ల స్థానం) లోని అంకెలచే ఏర్పడిన సంఖ్య '4' చే నిశ్శేషంగా భాగింపబడితేనే ఆ సంఖ్య '4' చే నిశ్శేషంగా భాగింపబడుతుంది.

(iv) ఒక సహజ సంఖ్య చివరి అంకె (ఒకట్ల స్థానము) '5' (లేదా) '0' ఉంటే ఆ సంఖ్య "5" చే నిశ్శేషంగా భాగింపబడుతుంది.

(v) ఒక సంఖ్య '2' చేతను మరియు '3' చేతను నిశ్శేషంగా భాగింపబడితేనే ఆ సంఖ్య '6' చే నిశ్శేషంగా భాగింపబడుతుంది.

(vi) ఒక సంఖ్యలోని ఒకట్ల స్థానములో గల అంకెను 2 తో గుణించగా వచ్చిన దానిని మిగిలిన అంకెలతో ఏర్పడు సంఖ్య నుండి తీసివేస్తే వచ్చిన సంఖ్య 7 తో భాగించబడితే ఇచ్చిన సంఖ్య 7 తో భాగించబడును.

ఉదా : 1491; $1 \times 2 = 2$; $149 - 2 = 147$; 147 అనునది 7 తో భాగింపబడును. కావున 1491 అనే సంఖ్య 7 తో భాగించబడును.

(vii) ఇచ్చిన సంఖ్యలోని చివరి మూడు అంకెలతో ఏర్పడినసంఖ్య '8' తో నిశ్శేషంగా భాగింపబడితేనే, ఇచ్చిన ఆ సహజ సంఖ్య '8' తో నిశ్శేషంగా భాగింపబడుతుంది.

(viii) ఒక సహజ సంఖ్యలోని అంకెల మొత్తము '9' చే భాగింపబడితేనే ఆ సంఖ్య '9' చే నిశ్శేషంగా భాగింపబడుతుంది.

(ix) ఒక సహజ సంఖ్యలోని చివరి (ఒకట్ల స్థానము) లోని అంకె '0' అయితేనే ఆ సంఖ్య '10' చే భాగింపబడుతుంది.

(x) ఒక సహజ సంఖ్యలో కుడి నుండి ఎడమవైపుకు పోతూ అంకె వదిలి అంకెల మొత్తము కనుగొనాలి. తరువాత వదిలి వేసిన అంకెల మొత్తము కనుగొనాలి.

ఈ మొత్తాల భేదము '11' చే భాగింపబడితేనే ఆ సంఖ్య '11' చే నిశ్శేషంగా భాగింపబడుతుంది.

గరిష్ఠ సామాన్య భాజకము (గ.సా.భా) (లేదా) గరిష్ఠ సామాన్య కారణాంకము (Greatest Common Divisor (or) Greatest Common Factor) :

రెండు సంఖ్యల సామాన్య కారణాంకాలలో మిక్కిలి పెద్ద దానిని వాటి గరిష్ఠ సామాన్య భాజకము (గ.సా.భా) లేదా గరిష్ఠ సామాన్య కారణాంకము అందురు.

ఉదా : (i) 48, 60 ల గ.సా.భా. = 12

(ii) 570, 665; 266 ల గ.సా.భా. = 19.

కనిష్ఠ సామాన్య గుణిజము (క.సా.గు.) (Least Common Multiple) : రెండు సహజ సంఖ్యల గుణిజాలలోని మిక్కిలి చిన్న సామాన్య గుణిజాన్ని ఆ రెండు సహజ సంఖ్యల కనిష్ఠ సామాన్య గుణిజము (క.సా.గు) అని అంటారు. (లేదా)

రెండు అంతకంటె ఎక్కువైన సహజ సంఖ్యల సామాన్య గుణిజాలలో మిక్కిలి చిన్న దానిని వాటి "కనిష్ఠ సామాన్య గుణిజము" (క.సా.గు) అని అందురు.

* రెండు సంఖ్యలు పరస్పర ప్రధాన సంఖ్యలైతే, వాటి లబ్ధమే వాటి క.సా.గు.

* ఇచ్చిన రెండు సంఖ్యలలో మొదటి సంఖ్య; రెండవ దాని గుణిజమైన ఆ సంఖ్యల క.సా.గు. మొదటి సంఖ్య అవుతుంది.

* రెండు సంఖ్యల లబ్ధము వాటి గ.సా.భా.; క.సా.గు.ల లబ్ధానికి సమానము.

i.e., a, b లు రెండు సహజ సంఖ్యలై వాటి క.సా.గు.;

గ.సా.భా.లు L, G లు అయితే $a \times b = L \times G$ అగును.

* * *

2. పూర్ణసంఖ్యలు
(Integers)

పూర్ణ సంఖ్యలు (Integers) : 1, 2, 3, 4,.......ధన సంఖ్యలు;

........,−3, −2, −1. ఋణ సంఖ్యలు మరియు సున్నాలను కలిపి "పూర్ణ సంఖ్యలు" అని అందురు.

* పూర్ణ సంఖ్యలను "Z" తో సూచిస్తాము.
* పూర్ణ సంఖ్యల సమితి Z = {........,-3,-2,-1,0,1,2,3,........}
* {1, 2, 3, 4,...............} లను ధన పూర్ణ సంఖ్యలు అని అందురు.
* {..............,-4,-3,-2,-1} లను ఋణ పూర్ణ సంఖ్యలు అని అందురు.
* {0, 1, 2, 3, ...}లను రుణేతర పూర్ణ సంఖ్యలు అని అందురు.
* మిక్కిలి పెద్ద/మిక్కిలి చిన్న పూర్ణ సంఖ్యలేదు.
* −1, −2, −3,............. అనే సంఖ్యలను వరుసగా 1, 2, 3,.......ల వ్యతిరేక సంఖ్యలు (లేక సంకలన విలోమాలు) అని అందురు.
* 1, 2, 3,..........అనే సంఖ్యలు −1, −2, −3,............ల వ్యతిరేక సంఖ్యలు అవుతాయి.
* ఒక జత పరస్పర వ్యతిరేక సంఖ్యల మొత్తము ఎప్పుడు "సున్నా" అగును.
* ధన పూర్ణ సంఖ్యలన్నియు "సున్నా"కు కుడివైపున మరియు ఋణ పూర్ణ సంఖ్యలన్నియు "సున్నా"కు ఎడమవైపున ఉండును.

గమనిక : a, b అను పూర్ణ సంఖ్యలకు $a>b$ అయితే, a అనునది b కు కుడివైపున ఉండును.

పూర్ణ సంఖ్యల క్రమము (Ordering of Integers) :

................<-3<-2<-1<0<1<2<3<4,..................

పూర్ణ సంఖ్యల పరమ మూల్యము (Absolute Value of Integers) :

'a' అనే పూర్ణ సంఖ్య యొక్క పరమ మూల్యమును "$|a|$" తో సూచిస్తాము. దీనిని ఈ క్రింది విధంగా నిర్వచిస్తాము.

a ధన పూర్ణసంఖ్య అయితే $|a| = a$

a ఋణ పూర్ణసంఖ్య అయితే $|a| = -a$

a సున్నా అయితే $|a| = 0$

గమనిక : ఒక పూర్ణసంఖ్య పరమమూల్యం, ఆ పూర్ణసంఖ్య గుర్తుతో సంబంధంలేని సంఖ్యావిలువ మాత్రమే.

* ఒక పూర్ణ సంఖ్య పరమమూల్యం ఎల్లప్పుడు రుణేతరము అవుతుంది.

ఉదా : $|-5| = 5$; $|5| = 5$; $|0| = 0$

* రెండు ధన పూర్ణ సంఖ్యల మొత్తము ధన పూర్ణసంఖ్య అగును.

* రెండు రుణ పూర్ణ సంఖ్యల మొత్తము ఎప్పుడు రుణ పూర్ణ సంఖ్యయే.

* రెండు పూర్ణసంఖ్యలలో ఒకటి ధన, రెండవది రుణ పూర్ణసంఖ్యయైన వాటి మొత్తము ధనపూర్ణ సంఖ్య, రుణ పూర్ణసంఖ్య (లేదా) సున్నా కావచ్చును.

పూర్ణ సంఖ్యల సంకలన ధర్మాలు (Properties of Addition in Integers) :

(i) **సంవృత ధర్మము** (Closure Property) : a, b అనే ఏదేని రెండు పూర్ణ సంఖ్యలకు వాటి మొత్తము అయిన "a+b" కూడ పూర్ణ సంఖ్యయే.

(ii) **స్థిత్యంతర (వినిమయ) ధర్మము** (Commutative Property): a, b లు రెండు పూర్ణసంఖ్యలు అయితే, $a+b = b+a$

(iii) **సహచర ధర్మము** (Associative Property) : a, b, c లు మూడు పూర్ణ సంఖ్యలు అయితే, $a+(b+c) = (a+b)+c$

(iv) **తత్సమ ధర్మము** (Identity Property) : 'a' పూర్ణ సంఖ్య అయితే, $a+0 = 0+a = a$

ఇచ్చుట 'a' ను పూర్ణసంఖ్యల కూడికలో తత్సమాంశం అందురు.

(v) **విలోమ ధర్మము** (Inverse Property) : 'a' అను పూర్ణ సంఖ్యకు $a+(-a) = (-a)+a = 0$ అగును. ఇచ్చుట '-a' ను 'a' యొక్క సంకలన విలోమము అందురు.

* a, b అనే ఏవేని రెండు పూర్ణ సంఖ్యలకు $a-b = a+(-b)$ అగును.

పూర్ణ సంఖ్యల గుణకార ధర్మాలు (Multiplication Properties of Integers) :

(i) రెండు ధన పూర్ణ సంఖ్యల లబ్ధము ఒక ధనపూర్ణ సంఖ్య.

(ii) ఒక ధన పూర్ణ సంఖ్య; ఒక రుణ పూర్ణ సంఖ్యల లబ్ధము ఒక రుణపూర్ణసంఖ్య అగును.

(iii) రెండు రుణపూర్ణ సంఖ్యల లబ్ధము ఒక ధన పూర్ణసంఖ్య.

+	×	+	=	+
+	×	-	=	-
-	×	+	=	-
-	×	-	=	+

పూర్ణాంకాల గుణకార ధర్మాలు (Properties of Multiplication in Integers) :
పూర్ణాంకాలు గుణకారము దృష్ట్యా

(i) సంవృత ధర్మము
(ii) స్థిత్యంతర (వినిమయ) ధర్మము
(iii) సహచర ధర్మము
(iv) సున్నా ధర్మం
(v) తత్సమ ధర్మం
(vi) విభాగ ధర్మాలను పాటించును.

(i) **సంవృత ధర్మము** (Closure Property) : a, b లు పూర్ణసంఖ్యలైన వాటి లబ్ధము $a \times b$ కూడా పూర్ణసంఖ్య అగును.

(ii) **స్థిత్యంతర ధర్మము** (Commutative Property) : a, b లు ఏవేని రెండు పూర్ణసంఖ్యలైన $a \times b = b \times a$ అగును.

(iii) **సహచర ధర్మము** (Associative Property) : a, b, c లు మూడు పూర్ణ సంఖ్యలు అయితే, $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$ అగును.

(iv) **సున్నా ధర్మము** (Identity Property) : 'a' ఏదేని పూర్ణ సంఖ్య అయితే, $a \times 0 = 0 \times a = 0$ అగును.

(v) **తత్సమ ధర్మము** (Identity Property) : 'a' ఏదేని పూర్ణ సంఖ్య అయితే, $a \times 1 = 1 \times a = a$ అగును.

(vi) **విభాగ ధర్మము** (Distributive Property) : a, b, c లు ఏవేని మూడు పూర్ణసంఖ్యలకు, $a \times (b+c) = a \times b + a \times c$ అగును. ఈ ధర్మాన్ని పూర్ణ సంఖ్యలందు కూడికపై "గుణకార విభాగధర్మం" అని అందురు.

* $a \div b = x$ అయితే $a = b.x$ అగును.

పూర్ణసంఖ్యల భాగాహార ధర్మాలు (Properties of Division in Integers) :

(i) a, b లు పూర్ణసంఖ్యలు అయితే, $a \div b$ ఎప్పుడూ పూర్ణ సంఖ్య కానక్కర్లేదు.

(ii) సున్నా (0) కాని 'a' అనే పూర్ణ సంఖ్యకు $a \div a = 1$ అగును.

(iii) ప్రతీ పూర్ణసంఖ్య 'a' కు $a \div 1 = a$ అగును.

(iv) సున్నా కాని 'a' అనే పూర్ణ సంఖ్యకు $a \div (-a) = -1$ అగును.

(v) సున్నాకాని పూర్ణసంఖ్య 'a' కు $0 \div a = 0$ అగును.

(vi) సున్నాచే భాగహారము నిర్వచించబడదు.

పూర్ణ సంఖ్యల ఘాతాలు (Powers of Integers) : 'a' ఒక పూర్ణసంఖ్యయైన, axaxaxax...............(n సార్లు) అను లబ్ధాన్ని "a^n" తో సూచిస్తాము.

* a^n లో 'a' ను భూమి (అధారము) అని; 'n' ను ఘాతాంకము మరియు "a^n" ను a యొక్క n వ ఘాతము అని అందురు.

ఉదా : $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$

* 'a' ఒక పూర్ణ సంఖ్యయైన, "a^2" ను సంపూర్ణ వర్గము అని అందురు.

* 'a' ఒక పూర్ణ సంఖ్య అయితే, "a^3" ను సంపూర్ణ ఘనము అని అందురు.

***

3. అకరణీయ సంఖ్యలు
(Rational Numbers)

అకరణీయ సంఖ్య (Rational Number) : a, b లు పూర్ణ సంఖ్యలై $b \neq 0$ అయితే,

$\frac{a}{b}$ రూపంలో ఉన్న సంఖ్యను "అకరణీయ సంఖ్య" అంటారు.

* అకరణీయ సంఖ్యల సమూహాన్ని "Q" తో సూచిస్తాము.
* అకరణీయ సంఖ్యలలో, పూర్ణ సంఖ్యలు కూడా ఇమిడి ఉన్నాయి.
* ఒక ధన అకరణీయ సంఖ్య; రుణ అకరణీయ సంఖ్య కంటే ఎప్పుడూ పెద్దది.
* ప్రతి రుణ అకరణీయ సంఖ్య "0" కంటె తక్కువ.
* ప్రతి ధన అకరణీయ సంఖ్య "0" కంటె ఎక్కువ.
* రెండు అకరణీయ సంఖ్యల హారాలు సమానమైన; తక్కువ లవము కల అకరణీయ సంఖ్య రెండవ దాని కన్నా చిన్నది.

ఉదా : $\frac{-7}{8} < \frac{-3}{8}$; $\frac{4}{7} < \frac{6}{7}$,..........

* రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మొత్తము (లేదా) భేదము (లేదా) లబ్ధము (లేదా) భాగాహారము అకరణీయ సంఖ్యయే అగును.
* ఏ రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్యనైనా అనంతమైన అకరణీయ సంఖ్యలు ఉండును.

సంకలనము దృష్ట్యా అకరణీయ సంఖ్యల ధర్మాలు (Properties of Rational Numbers with respect to Addition) : సంకలనము దృష్ట్యా అకరణీయ సంఖ్యలు (i) సంవృత ధర్మము; (ii) స్థిత్యంతర (వినిమయ) ధర్మము; (iii) సహచర ధర్మము; (iv) తత్సమ ధర్మం; (v) విలోమ ధర్మాలను పాటించును.

(i) **సంవృత ధర్మము** (Closure Property) : అకరణీయ సంఖ్యలకు సంకలన సంవృత ధర్మం వర్తిస్తుంది.

ఉదా : $\frac{3}{4} + \frac{4}{5} = \frac{31}{20}$

(ii) **స్థిత్యంతర ధర్మము** (Commutative Property) : అకరణీయ సంఖ్యలకు సంకలన స్థిత్యంతర ధర్మం వర్తిస్తుంది. $\frac{a}{b};\frac{c}{d}$ అనే ఏ రెండు అకరణీయ సంఖ్యలకైనా, $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$ అగును. (ఇచ్చట a, b, c, d లు పూర్ణ సంఖ్యలు $b\neq 0; d\neq 0$).

(iii) **సహచర ధర్మము** (Associative Property) : అకరణీయ సంఖ్య సంకలన సహచర ధర్మం పాటిస్తాయి. $\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}$ అగును. (ఇచ్చట a, b, c, d, e, f లు పూర్ణ సంఖ్యలు $b\neq0;d\neq0;f\neq0$).

(iv) **తత్సమ ధర్మము** (Identity Property) : అకరణీయ సంఖ్యలలో "సున్నా" సంకలన తత్సమ మూలకము.

$\frac{a}{b},(b\neq 0)$ అనేది అకరణీయ సంఖ్య అయితే $0+\frac{a}{b}=\frac{a}{b}+0=\frac{a}{b}$ అగును.

(v) **అకరణీయ సంఖ్యలు సంకలన విలోమ ధర్మము** (Additive Inverse Property) : అకరణీయ సంఖ్యలు సంకలన విలోమ ధర్మాన్ని పాటిస్తాయి. సున్నాకాని ప్రతి అకరణీయ సంఖ్య $\frac{p}{q}$ కు, ఒకే ఒక అకరణీయ సంఖ్య $\frac{-p}{q}$; $\frac{p}{q}+\left(\frac{-p}{q}\right)=0$ అయ్యేట్లు ఉంటుంది.

గమనిక : $\frac{p}{q};\frac{-p}{q}$ లు ఒకటి మరొక దానికి సంకలన విలోమాలు.

ఉదా : $\frac{2}{3}$ కి సంకలన విలోమము $\frac{-2}{3}$.

అకరణీయ సంఖ్యల లబ్ధము (Product of Rational Numbers): $\frac{a}{b};\frac{c}{d}$ లు రెండు అకరణీయ సంఖ్యలు అయితే, వాటి లబ్ధాన్ని $\frac{a\times c}{b\times d}$ అని నిర్వచిస్తాము.

గుణకార దృష్ట్యా అకరణీయ సంఖ్యల ధర్మాలు (Properities of rational numbers with respect to multiplication) : అకరణీయ సంఖ్యలు గుణకారము దృష్ట్యా

(i) సంవృత ధర్మము; (ii) స్థిత్యంతర (వినిమయ) ధర్మము; (iii) సహచర ధర్మము; (iv) తత్సమ ధర్మం; (v) సున్నా ధర్మం; (vi) విలోమ ధర్మము; (vii) కూడికపై విభాగ ధర్మాలను పాటిస్తాయి.

(i) **సంవృత ధర్మము (Closure Property)** $\frac{a}{b}; \frac{c}{d}$ అనే రెండు అకరణీయ సంఖ్యల లబ్ధము అకరణీయ సంఖ్య అగును.

$\therefore$ అకరణీయ సంఖ్యలు గుణకారం దృష్ట్యా "సంవృత ధర్మాన్ని" పాటిస్తాయి.

(ii) **స్థిత్యంతర ధర్మము (Communative Property)** $\frac{a}{b}; \frac{c}{d}$ అనే ఏవేని రెండు అకరణీయ సంఖ్యలకు, $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$ అగును.

$\therefore$ అకరణీయ సంఖ్యలకు "గుణకార స్థిత్యంతర ధర్మం" వర్తిస్తుంది.

(iii) **సహచర ధర్మము** (Associative Property) **:** $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$ అనేవి మూడు అకరణీయ సంఖ్యలైన, $\left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) \times \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} \times \frac{e}{f}\right)$ అగును.

అకరణీయ సంఖ్యలు గుణకార సహచర ధర్మాన్ని పాటిస్తాయి.

(iv) **తత్సమ ధర్మము** (Identity Property) **:** $\frac{a}{b}$ అనే అకరణీయ సంఖ్యకు,

$1 \times \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \times 1 = \frac{a}{b}$ అగును.

1 ని అకరణీయ సంఖ్యల "గుణకార తత్సమ అంశం" అని అందురు.

(v) **సున్నా ధర్మము** (Zero Property) **:** $\frac{a}{b}$ ఒక అకరణీయ సంఖ్య అయితే, $\frac{a}{b} \times 0 = 0 \times \frac{a}{b} = 0$

(vi) **విలోమ ధర్మము** (Inverse Property) **:** $\frac{a}{b} (a \neq 0; b \neq 0)$ అనే అకరణీయ సంఖ్య యొక్క గుణకార విలోమము $\frac{b}{a}$ అగును.

గమనిక : సున్నా కాని ప్రతి అకరణీయ సంఖ్యకు గుణకార విలోమము ఉండును.

* '0' (సున్నా) కు గుణకార విలోమము ఉండదు.

* '$\frac{1}{a}$' ను 'a' యొక్క గుణకార విలోమము అందురు.

(vii) $\frac{a}{b};\frac{c}{d};\frac{e}{f}$ లు అకరణీయ సంఖ్యలైతే;

$\frac{a}{b}\times\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\left(\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\right)+\left(\frac{a}{b}\times\frac{e}{f}\right)$ అగును.

∴ అకరణీయ సంఖ్యల సమితిలో గుణకారం, కూడికపై విభాగ న్యాయాన్ని పాటిస్తుంది.

గుణకార విలోమము (Multiplicative Inverse) : రెండు సంఖ్యల లబ్ధము "1" అయితే, ఒక సంఖ్య మరొక సంఖ్యకు "గుణకార విలోమము" అని అందురు.

అకరణీయ సంఖ్యల భాగాహారము (Division of Rational Numbers) :

$\frac{a}{b};\frac{c}{d}$ లు రెండు అకరణీయ సంఖ్యలు అయితే, $\frac{a}{b}$ ని $\frac{c}{d}$ చే భాగించేందుకు $\frac{a}{b}$ ని $\frac{c}{d}$ గుణకార విలోమము $\frac{d}{c}$ చే గుణిస్తాము. i.e., $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$

* a, b అనే రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్య $\frac{a+b}{2}$ అనే అకరణీయ సంఖ్య ఉంది.

*అకరణీయ సంఖ్యల సమితికి "సాంద్రత" ధర్మం ఉంది.

సాంద్రత ధర్మం (Property of Density) : రెండు అకరణీయ సంఖ్యల (అవి ఎంత దగ్గరగా ఉన్ననూ) మధ్య అపరిమితంగా అకరణీయ సంఖ్యలు ఉంటాయి. ముఖ్యమైన ఈ ధర్మాన్ని "సాంద్రత ధర్మం" అని అందురు.

గమనిక : అకరణీయ సంఖ్యలను అంతమయ్యే (లేదా) అంతం లేకుండా ఆవర్తనమయ్యే దశాంశాలుగా సూచించవచ్చును.

* ప్రతి అంతం అయ్యే లేదా అంతంకాని ఆవర్తిత దశాంశాన్ని $\frac{p}{q}(p,q\in z;q\neq 0)$ రూపంలో వ్రాయవచ్చు.

అంతమయ్యే దశాంశ రూపము (లేదా) అనావర్త దశాంశము (Terminatin Decimal) : ఒక అకరణీయ సంఖ్యను దశాంశ రూపములో రాసిన, దశాంశ బిందువు తరువాత వచ్చే స్థానాలు పరిమితమైనవి అయితే, అటువంటి దశాంశ రూపాన్ని "అంతమయ్యే (లేక) చివరిస్థానం" కల దశాంశ రూపం (లేక) అంతంకల దశాంశం (లేదా) అనావర్త దశాంశము అందురు.

ఉదా : $\frac{3}{4}=0.75;\frac{5}{8}=0.625$

అంతము లేని దశాంశ రూపము (లేదా) ఆవర్త దశాంశము (Non-terminating Decimal or Recurring Decimals) : ఒక అకరణీయ సంఖ్యను దశాంశ రూపములో రాసిన, దశాంశ బిందువు తరువాత వచ్చే స్థానాలు అపరిమితమైనవి (అంతం లేకుండా) అయితే, అటువంటి దశాంశ రూపాన్ని "అంతములేని మరల మరల వచ్చు దశాంశము" (లేదా) "ఆవర్త దశాంశాలు" అని అందురు.

ఉదా : $\frac{1}{3}=0.3333....=0\bar{3}$

$\frac{7}{15}=0.46666.......=0.4\bar{6}$

వ్యవధి మరియు అవధి (Period And Periodicity) : అంతముకాని ఆవర్తనమయ్యే దశాంశ భిన్నాలలో ఆవర్తనమయ్యే అంకెల గుంపును "వ్యవధి" అని; అందలి అంకెల సంఖ్యను "అవధి" అని అంటారు.

ఉదా : $\frac{1}{२}=0.\bar{3}$ లో వ్యవధి = 3; అవధి 1

$\frac{7}{15}=0.4\bar{6}$ లో వ్యవధి = 6; అవధి 1

$\frac{3}{11}=0\overline{27}$ లో వ్యవధి = 27; అవధి 2

$\frac{5}{11}=0.\overline{384615}$ లో వ్యవధి = 384615; అవధి 6

శుద్ధ ఆవర్తన దశాంశము (లేదా) పూర్ణ ఆవర్త దశాంశము (Pure Repeating Decimal) : దశాంశ బిందువు తరువాత వచ్చే అంకెలు అన్నియు అంతం లేకుండా ఆవర్తనము అయితే, అటువంటి దశాంశాన్ని "శుద్ధ (పూర్ణ) ఆవర్తన దశాంశము" అని అందురు.

ఉదా : $0.\bar{3}=0.3333........$ $\frac{10}{11}=0.\overline{90}$

మిశ్రమ ఆవర్తన దశాంశము (Mixed Repeating Decimal) : దశాంశ బిందువు తరువాత వచ్చే కొన్ని అంకెలు ఆవర్తనం కాకపోతే, అటువంటి దశాంశాన్ని "మిశ్రమ ఆవర్త దశాంశం" అని అందురు.

ఉదా : $\frac{52}{15}=3.4666......=3.4\bar{6}$

గమనిక : అకరణీయ సంఖ్యా సమితి ఈ క్రింది క్రమ ధర్మాలను కూడా పాటిస్తాయి.

(i) **త్రివర్గీకృత న్యాయము** (Trichotomy Law) : x, y లు రెండు అకరణీయ సంఖ్యలైన దిగువ సంబంధాలలో ఏదో ఒకటి మాత్రమే వర్తిస్తుంది.

(i) $x<y$; (ii) $x=y$; (iii) $x>y$.

ఈ సంబంధాన్ని "త్రివర్గీకృత న్యాయము" అని అందురు.

(ii) **సంక్రమణ సంబంధము** (Transitive Property) : x, y, z లు ఏవేని మూడు అకరణీయ సంఖ్యలై, $x>y; y>z$. అయితే $x>z$ అగును. దీనిని "సంక్రమణ సంబంధము" అని అందురు.

(iii) x, y, z లు ఏవేని మూడు అకరణీయసంఖ్యలై, $z \neq 0$; $x>y$ అయినచో $x+z>y+z$ అగును.

(iv) x, y, z లు ఏవేని మూడు అకరణీయ సంఖ్యలై, z ధనసంఖ్య $x>y$ అయితే $xz>yz$ అగును.

గమనిక : అకరణీయ సంఖ్యా సమితి క్షేత్ర ధర్మాలతోపాటు పై నాలుగు ధర్మాలను కూడా కలిగి ఉంది. అందువలన అకరణీయ సంఖ్యాసమితిని "క్రమానుసరణ క్షేత్రము" అని అందురు.

క్షేత్రము (Field) : ఒక శూన్యేతర సమితి

(i) సంకలనము దృష్ట్యా ఆ సమితి ఒక ఎబీలియన్ సమూహము కావాలి.

(ii) ఆ సమితి యందలి శూన్యేతర మూలకాలన్నీ గుణకారము దృష్ట్యా ఒక ఎబిలియన్ సమూహము కావాలి.

(iii) గుణకార విభాగ న్యాయమును కలిగి ఉండాలి. అనే ధర్మాలను పాటిస్తే (కలిగి ఉంటే) దానిని "క్షేత్రము" అని అందురు.

వినిమయ సమూహము (లేదా) ఎబీలియన్ సమూహము (Commutative Group or Abelian Group) : ఒక సమూహము స్థిత్యంతర ధర్మాన్ని (వినిమయ ధర్మాన్ని) పాటిస్తే దానిని "ఎబీలియన్ సమూహము" (లేదా) వినిమయ సమూహము" అని అందురు.

సమూహము (Group) : ఒక శూన్యేతర సమితి ఏదేని ఒక ప్రక్రియలో (i) సంవృత ధర్మము; (ii) సహచర ధర్మము; (iii) తత్సమ ధర్మం; (iv) విలోమ ధర్మాలను పాటిస్తే ఆ సమితిని ఆ ప్రక్రియలో "సమూహము" అని అందురు.

* * *

4. వాస్తవ సంఖ్యలు
(Real Numbers)

వాస్తవ సంఖ్యాసమితి (Real Numbers Set) : కరణీయ సంఖ్యలు; అకరణీయ సంఖ్యలను కలిగి ఉన్న సమితిని "వాస్తవ సంఖ్యాసమితి" అని అందురు.

* వాస్తవ సంఖ్యలను "R" తో సూచిస్తాము.

* '0' రుణేతర వాస్తవ సంఖ్య.

* ధన వాస్తవ సంఖ్యల వర్గాలు ధనవాస్తవ సంఖ్యలే.

* ఋణ వాస్తవ సంఖ్యల వర్గాలు ధనవాస్తవ సంఖ్యలే.

* వర్గం ఋణ సంఖ్య అయ్యే వాస్తవ సంఖ్యలేదు.

* -1, యొక్క వర్గమూలాన్ని 'i' అనే కల్పిత సంఖ్యతో సూచిస్తాము.

i.e., $\sqrt{-1} = i$

$i^2 = -1$

* -4 యొక్క వర్గమూలాలు $-2i$; $2i$ అవుతాయి.

* π అనేది ఒక కరణీయ సంఖ్య.

* ప్రతి కరణీయ సంఖ్యను అంతంకల (లేదా) అంతంలేని ఆవర్తిత దశాంశంగా వ్రాయవచ్చును.

* S కరణీయ సంఖ్యల సమితిని సూచిస్తే, $R = Q \cup S$

గమనిక : సంఖ్యా రేఖపై ఏ బిందువైనా ఒక అకరణీయ సంఖ్యను గాని, లేక ఒక కరణీయ సంఖ్యను గాని సూచిస్తుంది.

వర్గము మరియు వర్గమూలము (Square & Square Root) :

$a \in w$ అయితే $a \times a = a^2$ను 'a' యొక్క వర్గము అనియు మరియు 'a' ను 'a^2' యొక్క వర్గమూలము అనియు అందురు.

(లేదా)

ఒక సంఖ్యను దాని చేతనే గుణిస్తే వచ్చే లబ్ధాన్ని ఆ సంఖ్యకు "వర్గం" అని అంటారు.

ఆ సంఖ్యను లబ్ధానికి "వర్గమూలము" అని అంటారు.

* వర్గమూలాన్ని "$\sqrt{\ }$" గుర్తుతో సూచిస్తాము.

* x యొక్క ధన వర్గమూలాన్ని "$\sqrt{x}$"చే సూచిస్తాము.

* ప్రతి ధన సంఖ్యకు రెండు వర్గమూలాలు ఉంటాయి. అందులో ఒకటి ధన సంఖ్య; రెండోది రుణ సంఖ్య. వీటి పరమమూల్యాలు సమానము.

* $\sqrt{0}=0$

* రుణ సంఖ్య యొక్క వర్గమూలాలు వాస్తవ సంఖ్యలలో లేవు.

ప్రధాన వర్గ మూలము (Principal Square Root) :

x యొక్క ధన వర్గ మూలము "$\sqrt{x}$" ను x కు ప్రధాన వర్గమూలము అందురు. **గమనిక :** i) +5, −5 ల వర్గము 25.

ii) 1,4,9, 16,25,................ల వర్గమూలాలు వరుసగా 1,2,3,4,5,..........అగును.

* పూర్ణ సంఖ్యల వర్గాలు 2,3,7,8 అంకెలతో అంతం కావు.

* పూర్ణ సంఖ్య వర్గం చివరి అంకె 0,1,4,5,6 (లేదా) 9 అవుతుంది.

పరిపూర్ణ సంఖ్యలు (లేదా) పరిపూర్ణ వర్గాలు (Perfect Square Number) :

ఒక సంఖ్యను రెండు సమాన కారణాంకాల లబ్ధంగా రాస్తే, ఆ సంఖ్యను "పరిపూర్ణ వర్గసంఖ్య" అని అందురు.

ఉదా : i) 4,9,81,..........పరిపూర్ణ వర్గ సంఖ్య

ii) 2,3,5,6,7,8,10,..........పరిపూర్ణ సంఖ్యలు కావు.

* 2,3,7,8 అంకెలతో అంతం అయ్యే సంఖ్యలు పరిపూర్ణ సంఖ్యలు కావు.

* ఒక సంఖ్యలో 'n' అంకెలు ఉంటే, దాని వర్గంలో "2n-1" లేదా "2n" అంకెలు ఉంటాయి.

* a,b లు రుణేతర వాస్తవ సంఖ్యలు అయితే,

i) $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$

$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$

ii) $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ విపర్యయంగా $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$

iii) $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$

iv) $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$

v) $\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq \sqrt{a-b}$

vi) $\sqrt{x^2 + y^2} \neq x + y$

vii) $\sqrt{x^2 - y^2} \neq x - y$

* a వాస్తవ సంఖ్య; m ధన పూర్ణాంకము అయితే,

i) $a^m = a \times a \times a \times \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (m సార్లు)

ii) $a^0 = 1$; $a \neq 0$

iii) $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$; $a \neq 0$

iv) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

భాగహార న్యాయం

v) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; $m > n$ $a \neq 0$ అయినప్పుడు

$= 1$; $m = n$ అయినప్పుడు

$= \frac{1}{a^{n-m}}$; $n > m$; $a \neq 0$

vi) $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$

vii) $(ab)^m = a^m . b^m$

viii) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$; $b \neq 0$ (విభక్త న్యాయం)

ix) $(abcd\ldots\ldots\ldots z)^m = a^m . b^m . c^m \ldots\ldots\ldots z^m$

x) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

xi) $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$

xii) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

xiii) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

* a ఒక వాస్తవ సంఖ్య, n ఒకటి కంటె పెద్దదైన సహజ సంఖ్య అయితే $x^n = a$ అయ్యేటట్లు వాస్తవ సంఖ్య 'x' ను a కి n వ మూలం అని అంటాము.

దీనిని $\sqrt[n]{a}$ (లేదా) $a^{1/n}$ తో సూచిస్తాము.

* $\sqrt[n]{a}$ ను $a^{1/n}$ యొక్క మూలరూపం అంటారు.

* $x^p = y$ అను సమీకరణానికి p సాధనలు ఉంటాయి.

* $x > 0;\ p \neq 0;\ p \in z^+$ అయితే,

$$y = x^p \Rightarrow x = y^{1/p}\ ;\ y > 0$$

ఇచ్చట x ను y యొక్క p వ మూలం అంటారు.

దీనిని $x = \sqrt[p]{y}$ గా వ్రాస్తారు.

* $x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$ ని x^p యొక్క q వ మూలం అంటారు.

ఇచ్చట $\frac{p}{q}$ ఒక అకరణీయ సంఖ్య.

వాస్తవ సంఖ్యా మాపము (Moduls of a Real Number) :

'x' ఒక వాస్తవ సంఖ్య అయితే, x యొక్క మాపాన్ని (లేదా) పరమ మూల్యమును "$|x|$" తో సూచిస్తాము. దీనిని ఈ క్రింది విధంగా నిర్వచిస్తాము.

$|x| = x$; $x>0$ అయినప్పుడు

$= -x$; $x<0$ అయినప్పుడు

$= 0$; $x=0$ అయినప్పుడు

$|x|$ ఎలప్పుడు ధనాత్మకమే.

$|x| = a \ (a>0) \Rightarrow x=a$ (లేదా) $x=-a$

పరమ మూల్య అసమీకరణాలు (Absolute Value Inequation) :

'a' ధనాత్మక వాస్తవ సంఖ్య అయితే,

$|x| > a$ అయినప్పుడు $x>a$ (లేదా) $x<-a$

$|x| \geq a$ అయినప్పుడు $x \geq a$ (లేదా) $x \leq -a$

$|x| < a$ అయినప్పుడు $-a<x<a$

$|x| \leq a$ అయినప్పుడు $-a \leq x \leq a$

*θ ఒక ప్రక్రియను సూచిస్తుందనుకొనుము. [θ= x; -; +; ÷] 'p' ఏదైనా ఒక సంఖ్యాసమితి మరియు a,b,c లు ఆ సంఖ్యాసమితి 'p' కి చెందినవి. అయితే,

1. సంవృత ధర్మము : $a,b \in p$ అయినప్పుడు

$a \ \theta \ b \in p$ అయితే p, θ పరిక్రియలో సంవృత ధర్మము కలిగి ఉంది.

2. స్థిత్యంతర ధర్మం : $a,b \in p$ అయినప్పుడు

$a \ \theta b = b \theta a$ అయితే p,θ పరిక్రియలో స్థిత్యంతర ధర్మము కలిగి ఉంది అంటాము.

3. సహచర ధర్మం : $a,b,c \in p$ అయినప్పుడు

$(a\theta b)\theta c = a\theta(b\theta c)$ అయితే, p,θ పరిక్రియలో సహచర ధర్మాన్ని కలిగి ఉంటుంది.

4. తత్సమ ధర్మం : $a,b \in p$ అయినప్పుడు

$e \in p$ మరియు $a\theta e = e \ \theta \ a = a$ అయితే, 'e' θపరిక్రియలో p లోని తత్సమాంశము.

గమనిక : సంఖ్యా సమితులలో 'e' విలువ సంకలన పరిక్రియలో "సున్న" అనియు మరియు గుణకార పరిక్రియలో "ఒకటి" అగును.

5. విలోమ ధర్మం : $a \in p$; $a^1 \in p$ అయినప్పుడు

$a \ \theta \ a^1 = e = a^1 \ \theta a$ అయితే, 'p'లో θ దృష్ట్యా a యొక్క విలోమము 'a^1' అవుతుంది.

గమనిక : సంఖ్యా సమితులు Z, Q లకు సంకలన పరిక్రియలో a యొక్క విలోమము $a^1 = -a$ అగును.

సంఖ్యా సమితిలు Q, R లకు (సున్నాకు తప్ప) గుణకార పరిక్రియలో a యొక్క విలోమము $a^1 = \frac{1}{a}$ అగును.

గుణకార విభాగ న్యాయము : P సంఖ్యాసమితిలో "+", "×" అనే రెండు పరిక్రియలు ఉన్నప్పుడు విభాగ న్యాయాన్ని క్రింది విధంగా సూచిస్తాము.

$$a \times (b+c) = (a \times b) + (a \times c)$$

ఈ ధర్మాన్ని గుణకారమునకు సంకలనముపై గల విభాగ న్యాయము (లేదా) గుణకార విభాగ న్యాయము అందురు.

* * *

5. బీజ గణితము
(Algebra)

* బీజగణితములో సంఖ్యలు లేక రాశులను బీజము (అక్షరము) లతో సూచిస్తాము.

సంఖ్యలు లేక రాశులను సూచించే ఈ బీజాలు "బీజాంకాలు" లేక "బీజాలు" అందురు.

* సంఖ్యలను లేక రాశులను అక్షరాలతో సూచించడం వలన ఒకే విధంగా మరల మరల వచ్చే ఫలితాలను సామాన్యీకరించడం సాధ్యమవుతుంది. అందువల్లనే బీజగణితాన్ని "సామాన్యీకరించబడ్డ అంకగణితం" అని అంటారు.

** **బీజాలతో ప్రాథమిక గణిత పరిక్రియలు చేయడం** (Basic Operations with Liberal Numbers) :

(i) **సంకలనము** (Addition) : x, y అనే బీజాలను కూడగా వచ్చు మొత్తాన్ని "$x+y$" తో సూచిస్తాము.

(ii) **వ్యవకలనము** (Substraction) : p నుండి q ను తీసివేయడాన్ని "$p-q$" తో సూచిస్తాము.

(iii) **గుణకారము** (Multiplication) : a,b అను బీజాల లబ్ధాన్ని $a\times b$ తో సూచిస్తాము. $a\times b$ ని $a.b$ (లేక) ab అని కూడా వ్రాస్తాము.

* ab అనే లబ్ధములో a,b లను ab కి కారణరాశులు అని అంటారు.

(iv) **భాగాహారము** (Division) : b తో a ను భాగించడము అనే విషయాన్ని $a \div b$ (లేదా) $\frac{a}{b}$ తో సూచిస్తాము.

(v) **చరరాశి** (Variable) : నిర్ణీత సమితిలోని ఏ విలువనైనా తీసుకోగలిగే బీజాన్ని "చరరాశి" అంటారు.

ఉదా : x సహజ సంఖ్య అయితే $2x-1$ ఒక బేసి సంఖ్యను సూచించును. ఇచ్చట x ను చరరాశి అంటారు.

(vi) **స్థిరరాశి** (Constant) : ఒకే స్థిరవిలువను కలిగిన రాశులను "స్థిరరాశులు" అని అంటారు.

ఉదా : 3, a, k,................

(vii) **పదము** (Term) : కేవలం స్థిరరాశులు గాని లేక కేవలం చరరాశులు గాని లేక గుణకార పరిక్రియలో కూడియున్న స్థిర, చర రాశుల సముదాయాన్ని గాని "పదము" అని అంటారు.

ఉదా : 3; $\frac{1}{5}$; x; bc; 5m-3n;....................

బీజీయ సమాసము (Algebraic Expression) : '+', '–' అను గుర్తులలో ఒక దానిచే కాని లేక రెండిటిచే గాని కలిసియున్న పదాల సముదాయాన్ని "బీజీయ సమాసం" అని అంటారు.

ఉదా : 3x+5y; 2a-8b; a+2b-3c;....................

(i) **ఏకపది** (Monomial) : ఒకే ఒక పదాన్ని కలిగియున్న బీజీయ సమాసాన్ని "ఏకపది" అని అంటారు.

ఉదా : 5x; -3y; abc; $\frac{5}{3}$;....................

(ii) **ద్విపది** (Binomial) : రెండు పదాలను మాత్రమే కలిగి ఉన్న బీజీయ సమాసాన్ని "ద్విపది" అని అంటారు.

ఉదా : 5x+8; 3x-2y; ab+$\frac{5}{7}$;....................

(iii) **త్రిపది** (Trinomial) : మూడు పదాలను మాత్రమే కలిగి ఉన్న బీజీయ సమాసాన్ని "త్రిపది" అని అంటారు.

ఉదా : x+2y+3z; $a^2-3b^2+5c^2$;....................

(iv) **బహుపది** (Polynomial) : మూడు కంటె ఎక్కువ పదాలను కలిగియున్న బీజీయ సమాసాన్ని "బహుపది" లేదా "బహుళపది" అని అంటారు.

ఉదా : 2x+3y-4z+5; $ab-b^2c+8d+e-3f$;....................

గమనిక : ఏ బహుపదిలో కూడా హారం చలరాశి పదంగా ఉండదు.

(v) **గుణకము** (Coefficient) : రెండు కాని అంతకంటె ఎక్కువగాని కారణాంకాలు కలిగిన లబ్ధంలో ప్రతి కారణాంకాన్ని మిగిలిన కారణాంకాల లబ్ధము యొక్క "గుణకం" అని అంటారు.

ఉదా : 5xy అనే లబ్ధములో
5 ను xy గుణకము అని,
x ను 5y గుణకము అని,
y ను 5x గుణకము అని అంటారు.

గమనిక : ఈ గుణకాలలో 5 ఒక సంఖ్య కావున, దానిని "సంఖ్యాగుణకం" అని అంటారు. x,y లను "బీజీయ గుణకాలు" అందురు.

(vi) **సజాతీయ పదాలు** (Like Terms) : ఒకే బీజీయ గుణకాన్ని కలిగియున్న పదాలను "సజాతి పదాలు" అని అంటారు.

ఉదా : $4x$; $5x$ లు సజాతీయ పదాలు.

2abc; $\frac{-5}{3}$ abc లు సజాతీయ పదాలు.

(vii) **విజాతీయ పదాలు** (Unlike Terms) : ఒకే బీజీయ గుణకాన్ని కలిగిలేని పదాలను "విజాతీయ పదాలు" అందురు.

ఉదా : $5x^2$; 5x అనే పదాలు విజాతీయ పదాలు.

$10p^2q^2$; $8pq^2$ అనే పదాలు విజాతీయ పదాలు.

(viii) **బీజీయ సమాసం విలువ** (Value of Algebric Expression) :

సమాసంలోని చరరాశుల స్థానంలో వాటికి ఇచ్చిన విలువలను ఉంచితే వచ్చే విలువను "బీజీయ సమాస విలువ" అని అంటారు.

గమనిక : బీజీయ సమాసంలోని చరరాశుల స్థానంలో ఇచ్చిన విలువలను ఉంచడాన్ని "ప్రతిక్షేపించడము" అని అంటారు.

ఉదా : (i) n=3 అయితే 5n+2 అనే సమాస విలువ = 5(3)+2 = 17

(ii) a = 1; b = 2; c = 3 అయినప్పుడు 2a+5b-3c విలువ 3.

గమనిక : సమాసం విలువ ఆ సమాసంలోని చలరాశి విలువపై ఆధారపడి ఉండును.

(ix) **సూక్ష్మీకరించడం** (Simplification) : సజాతి ఏకపదుల మొత్తమును ఒకే పదంలో రాయడాన్ని సజాతి పదాల సూక్ష్మీకరణ లేదా "రూపాంతరీకరణం" అంటారు.

ఉదా : (i) 6a+5a-3a సమాసం యొక్క సూక్ష్మీకరణ విలువ = 8a

(ii) 3x-2y-3z+7q సమాసంలో సజాతి పదాలు లేవు. కావున సూక్ష్మీకరించడం సాధ్యంకాదు.

బహుపది సూక్ష్మరూపము (Simplified Form of a Polynomial) : ఒక బహుపదిలోని ఏ రెండు పదాలు ఒకే విధంగా ఉండనిచో ఆ బహుపదిని సూక్ష్మరూపం (లేదా) ప్రామాణిక రూపములో ఉంది అంటాము.

సంకలన విలోమము (Additive Inverse) : a,b లు రెండు సంఖ్యలై $a+b = 0$ అయితే a,b లను ఒకటి మరియొక దాని "సంకలన విలోమము" అంటారు.

అనగా a యొక్క సంకలన విలోమము b
b యొక్క సంకలన విలోమము a

ఉదా : 5 యొక్క సంకలన విలోమము −5
−5 యొక్క సంకలన విలోమము 5
0 యొక్క సంకలన విలోమము 0

గమనిక : ఒక సంఖ్య యొక్క సంకలన విలోమాన్ని ఆ సంఖ్య యొక్క "ఋణసంఖ్య" అని అంటారు.

పూర్ణసంఖ్య గుణకాల బహుపది (Polynomial with Integral Coefficients) : ఒక బహుపదిలోని పదాల గుణకాలు పూర్ణ సంఖ్యలయితే, దానిని "పూర్ణ సంఖ్య గుణకాల బహుపది" అని అంటారు.

ఉదా : $1 + 2x + 3y$; $4xy - 5x^2y + 3z + 7$

అకరణీయ సంఖ్యా గుణక బహుపది (Polynomial with Rational Coefficient) : బహుపదిలో అకరణీయ గుణకాలు ఉంటే దానిని "అకరణీయ సంఖ్యా గుణక బహుపది" అని అంటారు.

ఉదా : $\frac{1}{2}x^2y+\frac{3}{4}xy^2+xyz$

$2+\frac{1}{3}x-\frac{1}{4}x^2$

ఒకే ఒక చలరాశి బహుపది (Polynomial in One Variable) : $a+bx+cx^2+dx^3$ అను బీజీయ సమాసాన్ని ఒకే ఒక చలరాశి బహుపది (లేదా) బహుపది అని అంటారు.

ఈ సమాసంలో a,b,c,d,.......అకరణీయ సంఖ్యలు (వీటిలో కనీసము ఒకటైనా సున్నా కాకుడదు).

శూన్య బహుపది (Zero Polynomial) : బహుపదిలోని గుణకాలు అన్నియు సున్న (0) అయితే ఆ బహుపదిని "శూన్య బహుపది" అని అంటారు.

అవరోహణ క్రమ బహుపదులు (Polynomials in descending powers of the variables) : బహుపదిలోని వివిధ పదాల పరిమాణాలు ఎడమనుండి కుడివైపునకు అవరోహణ క్రమంలో వ్రాసినచో, చలరాశి ఘాతాలలో ఆ బహుపదిని "అవరోహణ క్రమబహుపది" అని అంటారు.

ఉదా : $6x^2-7x+8$; $3x^3+5x-8$;........................

ఆరోహణ క్రమ బహుపది (Polynomials in ascending powers of the variable): బహుపదిలోని వివిధ పదాల పరిమాణాలు (చలరాశి ఘాతాలు) ఎడమ నుండి కుడివైపునకు ఆరోహణ క్రమంలో రాసినచో, ఆ బహుపదిని "ఆరోహణ క్రమబహుపది" అని అంటారు.

ఉదా : $5+7x+9x^2$; $2-5x^2+3x^3$;........................

బహుపది (బహుపరిమాణ పది) (Polynomial) : ఒక సమాసంలోని చలరాసి ధనపూర్ణ సంఖ్య ఘాతాలతో సంబంధం కల సమాసాన్ని "బహుపరిమాణ పది" (లేదా) క్లుప్తంగా "బహుపది" అని అంటారు.

దీనికి సమాసంలోని పదాల సంఖ్యతో సంబంధంలేదు.

బహుళపది (Multinomial) : సమాసంలోని చలరాసి ఘాతాలతో సంబంధం లేకుండా పదాల సంఖ్యతో మాత్రమే సంబంధము కల సమసాన్ని "బహుళపది" అని అంటారు.

ఉదా : $3\sqrt{x}+\frac{4}{x}$ అనేది బహుళపది మాత్రమే, కాని బహుపరిమాణపది కాదు.

ఏకపది పరిమాణము (Degree of a Monomial) : ఏకపదిలోని ప్రతి చలరాసి పరిమాణాల మొత్తాన్ని "ఏకపది పరిమాణము" అని అంటారు.

ఉదా : $3x^2y^3z^3$ అనే ఏక ఏకపది పరిమాణము = 2 + 3 + 5 = 10

* సున్న (0) కాని ఏకపదిలో చలరాశుల లేనిచో దాని పరిమాణము సున్న (0).

ఉదా : 3, 5, 7, 4,...........అను సంఖ్యల పరిమాణము సున్న.

బహుపది పరిమాణము (Degree of a Polynomial) : బహుపదిలోని పదాల పరిమాణాలలో అతిపెద్ద పరిమాణమును "బహుపది పరిమాణము" అని అంటారు.

ఉదా : $4x^2-5x+\frac{6}{7}x^3-\frac{5}{6}x^4$; అనే బహుపది యొక్క పరిమాణం 4.

* x చలరాశిగా గల సాధారణ ఏకఘాత పరిమాణ బహుపది "ax+b" $(a\neq0)$

* x చలరాసిగా గల రెండవ పరిమాణ బహుపది సాధారణ రూపం ax^2+bx+c $(a\neq0)$

దీనిని "వర్గ బహుపది" అని కూడా అందురు.

* $a\neq0$ అయినప్పుడు $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+............+px+q$ అనే బహుపదిని 'n' వ పరిమాణం గల బహుపది యొక్క సాధారణ రూపము అని అంటారు.

బహుపది శూన్యవిలువ (Zero of a Polynomial) : ఏ సంఖ్యకు ఒక బహుపది విలువ సున్నా అవుతుందో దానిని "బహుపది శూన్యవిలువ" అని అంటారు.

గమనిక : ax+b సున్నాకు సమానమయ్యే 'x' విలువను కనుక్కోవడం అంటే ax+b=0 అను సమీకరణాన్ని సాధించడం.

* ax+b బహుపది శూన్యవిలువ $x = \frac{-b}{a}$

* ax-b బహుపది శూన్యవిలువ $x = \frac{b}{a}$

ఉదా : $x = \frac{-5}{6}$ ను 6x+5 యొక్క శూన్య విలువ అంటారు.

గమనిక : బహుపది శూన్య విలువ; శూన్య బహుపది రెండు వేరువేరు (సమానం కాదు).

సమఘాత సమాసము (Homogeneous Expression) : ఒక బీజీయ సమాసంలోని పదాలన్నింటి పరిమాణాలు సమానమైతే అట్టి సమాసాన్ని "సమఘాత సమాసం" అని అంటారు.

బీజీయ సమాసాల్లో సాధారణంగా పదాల గుణకాలను a,b,c,.......లతోనూ; చరరాశులను x,y, z,................లతో సూచిస్తాము.

* ax+by ని x,y లలో ప్రథమ పరిమాణ సమఘాత సమాసం అంటారు.

* $ax^2+2hxy+by^2$ ని x,y లలో ద్వితీయ పరిమాణ సమఘాత సమాసం అంటారు.

* $ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3$ ని x,y లలో 3 వ పరిమాణ సమఘాత సమాసం అంటారు.

ఉదా : (i) $2x^3+3x^2y$ అనునది x, y లలో 3 వ పరిమాణ సమఘాత సమాసం.

(ii) $ax^4+bx^3y+cx^2y$ సమఘాత సమాసం కాదు.

గమనిక : సమఘాత సమాసంలో పదాల గుణకాలను లెక్కలోకి తీసుకోకుండా అందులోని పదాల పరిమాణాలను మాత్రమే చూస్తాము.

* ax+by+cz ను x, y, z లలో మొదటి పరిమాణ సమఘాత సమాసం.

* $ax^2+by^2+cz^2+dxy+eyz+fzx$ ను రెండవ పరిమాణ సమఘాత సమాసం అంటారు.

సంపూర్ణ సమఘాత సమాసము (Complete Homogeneous Expression) : ఒక సమఘాత సమాసములో వీలైన అన్ని పదాలు ఉంటే దాన్ని "సంపూర్ణ సమఘాత సమాసం" అని అంటారు.

గమనిక : (i) ax^2+bxy సమఘాత సమాసమే కాని సంపూర్ణము కాదు.

(ii) $ax^2+bxy+cy^2$ ఒక సంపూర్ణ సమఘాత సమాసం.

సౌష్ఠవ సమాసాలు (Symmetric Expressions) : $f(x,y)$ అనేది x,y లలో ఒక బీజీయ సమాసము అవుతూ, $f(x,y) = f(y,x)$ అయినచో, $f(x,y)$ ని "సౌష్ఠవ సమాసము" అని అంటారు.

ఉదా : (i) $ax+ay$ అనేది సమఘాతము మరియు సౌష్ఠవము .

(ii) $ax^2+bxy+ay^2+b$ అనేది సౌష్ఠవ సమాసము కాని సమఘాతము కాదు.

(iii) ax^2+by^2 సమఘాత సమాసము, కాని సౌష్ఠవము కాదు.

(iv) ax^2+by^2+c సమఘాతము కాదు; సౌష్ఠవము కాదు.

* $f(x,y,z)$ అనేది x,y,z లలో ఒక బీజీయ సమాసము.

$f(x,y,z) = f(y,x,z)$ అయితే

$f(x,y,z)$ ని x,y లలో సౌష్ఠవ సమాసము అంటారు.

సమఘాత సౌష్టవ సమాసము (Homogeneous Symmetric Expression) : ఒక సమాసము సమఘాతము; సౌష్ఠవము రెండూ అయితే అట్టి సమాసాన్ని "సమఘాత సౌష్ఠవ సమాసము" అని అంటారు.

ఉదా : $ax+ay$ అనేది సమఘాత సౌష్ఠవ సమాసము; పరిమాణము = 1.

ఉదా : x,y లలో రెండవ పరిమాణం గల సమఘాత, సౌష్ఠవ సమాసము $ax^2+bxy+ay^2$

ఉదా : x,y, z లలో ఒకటవ పరిమాణం గల సమఘాత; సౌష్ఠవ సమాసము $ax+ay+az$.

పరమ సౌష్ఠవ సమాసము (Absolute Symmetric Expression) : ఒక బీజీయ సమాసము $f(x,y,z)$ అనునది x, y చలరాశుల దృష్ట్యా; y, z ల దృష్ట్యా మరియు z, x ల దృష్ట్యా సౌష్ఠవము అయితే అట్టి సమాసాన్ని "పరమ సౌష్ఠవ సమాసము" అని అంటారు. (లేదా)

$f(x,y,z)$ అనేది ఏ రెండు చలరాశుల్లోనైనా సౌష్ఠవము అయితే f ఒక పరమ సౌష్ఠవ సమాసము అగును.

ఉదా : $ax^2+ay^2+az^2+2bxyz$ అనునది పరమ సౌష్ఠవ సమాసము.

గమనిక : రెండు సౌష్ఠవ సమాసాల మొత్తము; లబ్ధము; భేదము; విభక్తములన్నీ సౌష్ఠవాలే.

చక్రీయ సమాసము (Cyclic Expression) : f(x,y,z) అనునది ఒక సమాసము అవుతూ, f(x,y,z) = f(y,z,x) = f(z,x,y) అయితే f(x,y,z) ను "చక్రీయ సమాసము" అని అంటారు.

గమనిక : చక్రీయ సమాసాలలో మొత్తాలను సూచించుటకు $\sum$ (సిగ్మా) ను; లబ్ధాలను సూచించుటకు π (పై) అను సంకేతాలను వాడతాము.

* x(y+z) + y(z+x) + z(x+y) అనే చక్రీయ సమాసాన్ని $\sum\limits_{x,y,z} x(y+z)$ గా వ్రాస్తారు.

* $(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)$ ను $\pi_{a,b,c}\left(a^2+b^2\right)$ గా వ్రాస్తారు.

ఉదా : (i) $\sum\limits_{a,b} a^2b = a^2b + b^2a$

(ii) $\sum\limits_{a,b,c} a^2(b-c) = a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$

(iii) $\pi_{a,b,c}\left(a^2-b^2\right) = \left(a^2-b^2\right)\left(b^2-c^2\right)\left(c^2-a^2\right)$

(iv) $\pi_{a,b,c}(x+a) = (x+a)(x+b)(x+c)$

(v) $\left(\sum\limits_{a,b,c} a\right)^2 = (a+b+c)^2$

మోనిక్ వర్గ సమాసాలు (Monic Quadratic Expressions) : రెండోపరిమాణ పదం గుణకము ఒకటి అయిన బహుపదులను "మోనిక్ వర్గసమాసాలు" అని అంటారు. (లేదా)

x^2+px+q రూపంలోని వర్గసమాసాలను "మోనిక్ వర్గ సమాసాలు" అంటారు.

ఉదా : x^2+3x+4 ; x^2-5x+3

***

6. ఘతాంకాలు - బీజీయ సమాసాలు

(Exponents - Algebric Expressions)

* $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

* $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

* $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$

* $(a+b)^3 = a^3+b^3+3ab(a+b)$

  $= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

* $(a-b)^3 = a^3-b^3-3ab(a-b)$

  $= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

* $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

  $= a^2+b^2+c^2+2\ (ab+ac+bc)$

  $= a^2+(2a+b)b+(2a+2b+c)c$

* $(a+b+c+d)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$

  $= a^2+(2a+b)b+(2a+2b+c)c+(2a+2b+2c+d)d$

* $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$

* $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$

* $(a+b+c)\ (a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = a^3+b^3+c^3-3abc$

* $(ax+b)(cx+d) = acx^2+(ad+bc)x+bd$

* $(x+a)\ (x+b)(x+c)= x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc.$

***

7. ప్రత్యేక లబ్ధాలు
(Special Products)

* a, b, c లు మూడు అకరణీయ సంఖ్యలైతే, $a(b+c) = ab+ac$ ను "ఎడమ విభాగ న్యాయము". $(b+c)a = ba+ca$ ను "కుడి విభాగ న్యాయము" అని అంటారు.

* $(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$.

సర్వసమీకరణము (Identity) : ఒక సమీకరణంలోని చలరాశులకు ఏ వాస్తవ విలువలు ఇచ్చినా అది సత్యవాక్యం అయితే ఆ సమీకరణాన్ని "సర్వ సమీకరణము" అని అంటారు.

సర్వ సమీకరణమును "$\equiv$" తో సూచిస్తాము.

ఉదా : (i) $a(b+c) \equiv ab+ac$
(ii) $a^2-b^2 \equiv (a+b)(a-b)$
(iii) $(a+b)^2 \equiv a^2+2ab+b^2$

బీజీయ కారణాంకము (భాజకము) (Literal Factor (Divisor)) : రెండు లేక అంతకంటే ఎక్కువ బీజీయ సమాసాలను గుణిస్తే వాటి లబ్ధము ఏర్పడుతుంది. ఈ లబ్ధాన్ని ఏర్పరచడానికి గుణించిన ప్రతి బీజీయ సమాసాన్ని లబ్ధము యొక్క కారణరాశి (భాజకం) అంటారు.

ఉదా : (i) $a^2-b^2 \equiv (a+b)(a-b)$

$(a+b)$; $(a-b)$ లను a^2-b^2 యొక్క కారణరాశులు లేక భాజకాలు అంటారు.

(ii) $(a+b)$; (a^2-ab+b^2) లను a^3+b^3 యొక్క కారణరాశులు అంటారు.

ప్రధాన బహుళపది (Prime Multinomial) : ఒక బహుళపది ఒకటి చేతను మరియు తన చేతను మాత్రమే భాగింపబడిన, దానిని "ప్రధాన బహుళపది" అని అంటారు.

ఉదా : $2x+3$; x^2+1; x^2+y^2 ....ను ప్రధాన బహుపదులు.

ఏకపదుల గరిష్ఠ సామాన్య భాజకము (గ.సా.భా.) (Greatest Common Factor of the Monomials) : రెండు లేక అంతకన్నా ఎక్కువ ఏకపదుల ఉమ్మడి భాజకములలో (కారణరాశులలో) గరిష్ఠమైన భాజకమును (కారణరాశిని) ఇచ్చిన "ఏకపదుల గరిష్ఠ సామాన్య భాజకము" అని అంటారు.

i.e., గరిష్ఠ భాజకము అనగా, ఉమ్మడి అంకభాజకములలో గరిష్ఠ సంఖ్య మరియు ఉమ్మడి బీజీయ కారణరాశుల (భాజకము) లలో గరిష్ఠ పరిమాణము (ఘాతాంకము) కలవి.

ఉదా : (i) $7x; 21x^2; 14xy$ అను ఏకపదుల గ.సా.భా. $= 7x$

(ii) $10a; 4a^2; 24a^3$ అను ఏకపదుల గ.సా.భా. $= 2a$.

ప్రధాన కారణరాశులు (Prime Factor) : ఒక బహుళపది కారణరాశులు ప్రధాన సంఖ్యలు లేక ప్రధాన బహుళ పదులు అయితే వాటిని ఆ బహుళపది యొక్క "ప్రధాన కారణరాశులు" అంటారు.

ఉమ్మడి కారణరాశి (Common Factor) : బహుళపదిలోని పదములన్నింటిని నిశ్శేషముగా భాగించు సంఖ్య (లేక) బీజీయ సమాసమును బహుళపది పదముల "ఉమ్మడి కారణరాశి" అని అంటారు.

* ఒక ఏకపది వర్గముగా వ్రాయగలిగిన ఏకపదిని, "ఖచ్చిత వర్గము" అని అంటారు.

ఉదా : $x^2; 4a^2b^2$ లు ఖచ్చిత వర్గాలు.

* ఒక ఏకపది ఖచ్చిత వర్గమైనచో దానిని రెండు సమాన కారణరాశుల లబ్ధంగా వ్రాయవచ్చును. సమాన కారణరాసులలో ప్రతి దానిని ఇచ్చిన ఏకపది యొక్క "వర్గమూలము" అంటారు.

ఉదా : $64s^2t^4$ యొక్క వర్గమూలము $8st^2$.

* ఖచ్చిత వర్గమైన ప్రతి ఏకపదికి రెండు వర్గమూలాలు ఉంటాయి. ఇందులో ధన వర్గమూలాన్ని "ప్రధాన వర్గమూలము" అని అంటారు.

గమనిక : ఒక త్రిపది ఖచ్చిత వర్గము కావాలంటే

(i) త్రిపదిలోని రెండు పదాలు ఖచ్చితవర్గాలై ధనగుర్తును కలిగి ఉండాలి.

(ii) త్రిపదిలోని మిగిలిన పదము ఖచ్చిత వర్గములైన పదముల లబ్ధము యొక్క వర్గమూలానికి రెట్టింపు ఉండవలెను.

భాగాహార సూత్రము (Divison Rule) :

విభాజ్యము = విభక్తము × విభాజకము + శేషము.

* a, b లు వాస్తవ సంఖ్యలై $b \neq 0$ అయితే $a \div b$ అనగా a ను b చే భాగించుట లేక 'a' ను 'b' యొక్క గుణకార విలోమంతో గుణించుట అని అర్థము.

$$a \div b = \frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b} \quad (b \neq 0)$$

గమనిక : $\frac{a}{b}$ లో లవము 'a' ను విభాజ్యము అని,

హారము 'b' ను విభాజకము అని,

"$\frac{a}{b}$" ను విభక్తము (లేక) భాగఫలము అని అంటారు.

ఒక బహుళపదిని, దానితో సమానము లేక దానికంటె తక్కువ పరిమాణం గల బహుళపదితో మాత్రమే భాగింపగలము.

అంటే $p(x)$ అనే బహుళపది $g(x)$ బహుళపదితో భాగింపబడాలంటే,

$g(x)$ పరిమాణము $\leq p(x)$ పరిమాణము కావలెను.

గమనిక : ఒక బహుళపదిని ఏక పదిచే భాగించుటకు, బహుళపదిలోని ప్రతి పదాన్ని ఏకపదిచే భాగించి, వచ్చిన భాగఫలమును మొత్తమును తీసుకోనవలెను.

సూత్రము (Formulae) : సమస్య సాధనకు తరచుగా ఉపయోగించే సమీకరణాన్ని "సూత్రము" అని అంటారు.

* సూత్రాలు రెండు లేక అంతకంటే ఎక్కువ చరరాశుల మధ్య సంబంధాన్ని తెలుపుతాయి.

ఉదా : $A = S^2$ అనే సూత్రము చరరాశి A (చతురస్ర వైశాల్యం) మరియు చరరాశి 'S' (చతురస్ర భుజము) ల మధ్య గల సంబంధాన్ని తెలుపుతుంది.

సూత్రము యొక్క కర్త (Subject of the Formulae) : సమీకరణంలోని సమానత్వపు గుర్తుకు ఎడమవైపు ఒంటరిగా ఉండే (చరరాశిని) అవ్యక్తరాశిని సూత్రము యొక్క "కర్త" అని అంటారు.

ఉదా : $A = l \times b$ సూత్రంలో కర్త 'A'

$P = 2(l+b)$ సూత్రంలో కర్త 'P'

గమనిక : "కర్త" గా ఉండే చరరాశి గుణకము ఎప్పుడు ఒకటి అవుతుంది.

సహాయక సూత్రాలు (లేదా) రూపాంతర సూత్రాలు (Auxilary Formulae (or) Derived Formulae) : ఒక సూత్రంలో కర్తను మార్చడం వల్ల ఏర్పడే సూత్రాలను "సహాయక సూత్రాలు" (లేక) "రూపాంతర సూత్రాలు" అంటారు.

ఉదా : $a = \frac{s}{a}$ సూత్రంలోని సహాయక సూత్రాలు

$s = a \times n$; $n = \frac{s}{a}$ అవుతాయి.

** 'n' భుజములు గల ఒక బహుభుజిలో గల కర్ణాల సంఖ్య

$= \frac{n(n-1)}{2} - n$ (లేదా) $\frac{n(n-3)}{2}$

ఉదా : చతురస్రంలో గల కర్ణాల సంఖ్య $= \frac{4(4-3)}{2} = 2$

***

8. సమీకరణాలు మరియు అసమీకరణాలు
(Equations & Inequations)

సంఖ్యాసమాసాలు (Numerical Expressions) : 7+5; 8-3; 24×6; (10+8)-9; $\frac{22}{3}$,.......... మొదలయిన సంఖ్యల సముదాయలను "సంఖ్యాసమాసాలు" అని అంటారు.

* ప్రతి సంఖ్యాసమాసం ఒక సంఖ్యను సూచిస్తుంది.

గణిత వాక్యాలు (లేదా) సంఖ్యా వాక్యాలు (Mathematical Sentences (or) Numerical Sentences) : రెండు సంఖ్యా సమాసాలు సమానమో (=) లేక ఎక్కువో (>) లేక తక్కువో (<) మొదలయినట్టి వానిచే కలుపబడిన వాటిని "గణిత వాక్యాలు" లేక "సంఖ్యా వాక్యాలు" అని అంటారు.

ఉదా : 5<9+3; 7+4=11; 11>6+2; $5+2 \neq 9$.

* ఒక గణిత వాక్యం సత్యం కావచ్చు లేక అసత్యం కావచ్చు. కాని ఒకేసారి రెండు అవడానికి వీలులేదు.

గణిత ప్రవచనము (Mathematical Statement) : సత్యము అని కాని లేక అసత్యము అని కాని నిర్ణయించడానికి వీలగు గణిత వాక్యాన్ని "గణిత ప్రవచనము" అని అంటారు.

ఉదా : $5+7 \neq 13$; 3+2>4; 2+5<10;..................

అనిశ్చిత వాక్యాలు (Open Sentences) : సత్యము అని కాని, అసత్యము అని కాని నిర్ణయించడానికి వీలుకాని వాక్యాలను "అనిశ్చిత వాక్యాలు" అని అంటారు.

ఉదా : (i) ☐+3 = 6

(ii) (______+5)×2 = 24

(iii) ఆంధ్రప్రదేశ్ రాష్ట్ర ముఖ్య పట్టణం __________

గమనిక : అనిశ్చిత వాక్యములోని ఖాళీలో ఒక సంఖ్యను గాని లేక ఒక పదాన్ని గాని ప్రతిక్షేపించితే ఒక ప్రవచనము వస్తుంది.

మార్పిడి విలువ (Replacement Value) : అనిశ్చిత వాక్యంలో చరరాశికి బదులు

ప్రతిక్షేపించు ఒక్కొక్క విలువను "మార్పిడి విలువ" అని అంటారు.

* చరరాశికి బదులు ఒక విలువను ప్రతిక్షేపించడం ద్వారా అనిశ్చిత వాక్యాన్ని ఒక ప్రవచనంగా మార్చవచ్చు.

సమీకరణము (Equation) : "సమానత్వపు గుర్తు" (=) ను కలిగియున్న అనిశ్చిత వాక్యాన్ని "సమీకరణము" అని అంటారు.

ఉదా : $5+x = 10$; $3x-2 = 4$;......................

గమనిక : ఒక సమీకరణములో "=" గుర్తుకు ఇరువైపుల గల సమాసాలను పార్శ్వములు (వైపులు లేదా పక్కలు లేదా పక్షములు) అని అంటారు.

ఎడమ చేతివైపు ఉన్న సమాసాన్ని "ఎడమవైపు" (L.H.S.), కుడి చేతివైపు ఉన్న సమాసాన్ని "కుడివైపు" (R.H.S.) అని అంటారు.

సమీకరణం మూలం లేక సాధన (Roots (or) Solution of the Equation) : సమీకరణాన్ని తృప్తిపరిచే ప్రతి విలువను సమీకరణము యొక్క "సాధన" లేదా "మూలము" లేక "సత్యవిలువ" అని అంటారు.

ఉదా : $x+4 = 9$ యొక్క సాధన $x = 5$.

గమనిక : ఒక సమీకరణములో ఒకటి కన్నా ఎక్కువ చరరాశులు ఉండవచ్చు.
ఉదా : $x+y = 5$; $x+y+z = 100$; $x^2+x = 6$.

* సమీకరణములోని చరరాశి గరిష్ఠఘాతము ఒకటి కన్నా ఎక్కువ ఉండవచ్చు.

రేఖీయ సమీకరణము (Liner Equation) : సమీకరణములోని చరరాశుల గరిష్ఠ ఘాతము "1" అయితే ఆ సమీకరణాన్ని "రేఖీయ సమీకరణము" అని అంటారు.

ఉదా : $x+y = 6$; $x+y+z = 6$; $p+2 = 5$.

సామాన్య సమీకరణము (Simple Equation) : రేఖీయ సమీకరణంలో ఒకే చరరాశి ఉంటే ఆ సమీకరణాన్ని "సామాన్య సమీకరణము" (లేదా) "సాధారణ సమీకరణము" అని అంటారు.

ఉదా : $2x+3 = 7$.

యత్నదోష పద్ధతి (Trial and Error Method) : ఒక్కొక్క విలువను ప్రతిక్షేపిస్తూ అది సాధన అవుతుందో, కాదో పరిశీలిస్తూ సమీకరణాన్ని సాధించే పద్ధతిని "యత్నదోష పద్ధతి" అని అంటారు.

క్షేత్రము (లేదా) చరరాశి ప్రదేశము (Domain of the Variable) : సమీకరణములోని చరరాశి మార్పిడి విలువల సమితిని "చరరాశి ప్రదేశము" లేదా

"క్షేత్రము" అని అంటారు.

సమానత్వము (Equality) : సమానత్వపు గుర్తు కలిగియున్న సత్యప్రవచనాన్ని "సమానత్వం" అని అంటారు.

అసమానత్వము (Inequality) : ఎక్కువ (>) లేక తక్కువ (<) అను అసమానత్వపు గుర్తులను కలిగియున్న సత్యప్రవచనాన్ని "అసమానత్వం" అని అంటారు.

ఉదా : $7>5$; $2\times3<5\times7$;....................

* $a>b$ (లేక) $a<b$ అయితే, $a\neq b$

* $a\neq b\Rightarrow$ $a>b$ (లేక) $a<b$

* $a<b$ లేక $a=b$ ను $a\leq b$ (లేదా) $a\not>b$ తో సూచిస్తాయి.

అసమీకరణము (Inequation) : $\neq$; $<$, $\leq$, $>$ లేక $\geq$ లలో ఒక గుర్తును కలిగియున్న అనిశ్చిత వాక్యాన్ని "అసమీకరణము" అని అంటారు.

అసమీకరణ మూలము (Roots of Inequation) : అసమీకరణములో చరరాశికి బదులు ఏదైనా విలువను ప్రతిక్షేపించినప్పుడు అది సత్యప్రవచనము అయితే ప్రతిక్షేపించిన విలువను ఆ "అసమీకరణ మూలము" అని అంటారు.

(లేదా)

అసమీకరణాన్ని సత్యప్రవచనంగా చేయు మార్పిడి విలువలు "అసమీకరణం మూలాలు" అవుతాయి.

అసమీకరణ సాధన సమితి (లేదా) సత్యవిలువల సమితి (Solution set of the Inequation) : అసమీకరణము అన్ని మూలాలతో ఏర్పడిన సమితిని అసమీకరణం "సాధన సమితి" లేక "సత్యవిలువల సమితి" అని అంటారు.

ఉదా : $x<3$; క్షేత్రము w గా కలిగిన అసమీకరణములో $x=2$ అసమీకరణ ఒక మూలము.

గమనిక : అసమీకరణానికి ఒకే మూలము కాని, ఒకటి కన్నా ఎక్కువ మూలాలు కాని ఉండవచ్చును.

అసలు ఒక్క మూలం కూడా లేకుండా ఉండవచ్చును.

** సమానత్వ ధర్మాలు (Properties of Equality) :

** సమానత్వ ధర్మాలు (Properties of Equality) :

1. పరావర్తన ధర్మము లేక స్వతుల్య ధర్మము (Reflexive Property) : ప్రతిసంఖ్య x, దాని కదే సమానం అవుతుంది.

ఉదా : 5=5; $\frac{-2}{3} = \frac{-2}{3}$;

2. సౌష్ఠవ ధర్మము (Symmetric Property) : ఒక సంఖ్య మరో సంఖ్యకు సమానమైన, ఆ రెండవ సంఖ్య మొదటి సంఖ్యకు సమానం.

a, b లు రెండు సంఖ్యలు అయి, a=b అయితే b=a అగును.

3. సంక్రమణ ధర్మము (Transitive Property) : ఒక సంఖ్య రెండవదానికి సమానమై, రెండవ సంఖ్య మూడవ సంఖ్యకు సమానం అయితే మొదటి సంఖ్య మూడవ సంఖ్యకు సమానం.

a, b, c లు మూడు సంఖ్యలు.

a=b; b=c అయితే a=c అగును.

4. ఒకే సంఖ్య విడిగా రెండు సంఖ్యలకు సమానమైన, ఈ రెండు సంఖ్యలు సమానం.

x, a, b లు సంఖ్యలై,

x=a; x=b అయితే a=b అగును.

5. సంకలన ధర్మము (Addition Property) : సమానత్వపు రెండువైపులా ఒకే సంఖ్య కలిపిన; సమానత్వంలో మార్పు ఉండదు.

a, b, c లు మూడు సంఖ్యలై.

a=b అయితే a+c = b+c అగును.

6. వ్యవకలన ధర్మము (Subtraction Property) : సమానత్వపు రెండువైపులా ఒకే సంఖ్యను తీసివేసినా; సమానత్వము మారదు.

a, b, c లు మూడు సంఖ్యలై;

a=b అయితే a-c = b-c అగును.

7. గుణకార ధర్మము (Multiplication Property) : సమానత్వపు రెండువైపులా ఒకే సంఖ్యతో గుణించినా; సమానత్వము మారదు.

a, b, c లు మూడు సంఖ్యలు

a=b అయితే ac=bc అగును.

8. భాగాహార ధర్మము (Division Property) : సమానత్వపు రెండువైపులా ఒకే శూన్యేతర సంఖ్యతో భాగించినా, సమానత్వంలో మార్పు ఉండదు.

a, b, c సంఖ్యలలో $c \neq 0$ అయి

a=b అయితే $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ అగును.

గమనిక :

(i) సమీకరణపు సమానత్వం మారకుండా ఉండాలంటే, సమీకరణపు ఒక వైపున ఏ మార్పు చేస్తామో, రెండోవైపున కూడా అదే మార్పు చేయవలెను.

(ii) సమీకరణములోని పదాలను ఒకవైపు నుండి ఇంకొకవైపునకు తరలించిన వాటి గుర్తులు మారును.

(iii) సమీకరణములో ఒకవైపును భాగించు రాశిని రెండవవైపుకు తీసుకొని వెళ్ళినప్పుడు రెండవ వైపును అది గుణించును.

(iv) సమీకరణములో ఒకవైపును గుణించు రాశిని రెండవ వైపుకు తీసుకొని వెళ్ళినప్పుడు, రెండవ వైపును అది భాగించును.

(v) సమీకరణములో రెండువైపులా ఒకే పరిమాణము మరియు ఒకే గుర్తుగల పదములు ఉన్నచో, ఆ రెండు పదములను కొట్టివేయవచ్చును.

తరలించుట (లేదా) ప్రక్షాంతర స్థాపన (Transposition) : సమీకరణములో పదములను ఒకవైపు నుండి మరియొక వైపునకు తీసుకొని వెళ్ళుటను "తరలించుట" లేక "ప్రక్షాంతర స్థాపన" అని అంటారు.

గమనిక : సమీకరణాలలో గుణకాలు పూర్ణసంఖ్యలో ఉండునట్లు చూడవలెను. ఇందుకుగాను సమీకరణములోని భిన్నగుణకాల హారముల క.సా.గు. కనుగొని; సమీకరణము రెండువైపులా ఈ క.సా.గు.తో గుణించవలెను.

** అసమానత్వపు ధర్మాలు (Properties of Inequality) :

1. ధర్మము : అసమానత్వపు రెండువైపులా ఒకే సంఖ్యను కూడినా లేక ఒకే సంఖ్యను తీసివేసినా, అసమానత్వపు క్రమము (> or <) మారదు.

a, b, c లు మూడు సంఖ్యలై,

(i) $a<b$ అయితే,

$a+c<b+c$ మరియు $a-c<b-c$

ఇదే విధంగా

(ii) $a>b$ అయితే

$a+c>b+c$ మరియు $a-c>b-c$ అగును.

2. ధర్మము : అసమానత్వపు రెండువైపులా ఒకే ధనసంఖ్యతో గుణించినా లేక భాగించినా అసమానత్వపు క్రమము మారదు.

a, b, c లు మూడు సంఖ్యలు $c>0$ అయి,

(i) $a>b$ అయితే

$ac>bc$ మరియు $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$

ఇదే విధంగా

(ii) $a<b$అయితే

$ac<bc$ మరియు $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$ అగును.

3. ధర్మము : అసమానత్వపు రెండువైపులా ఒకే ఋణసంఖ్యతో గుణించినా (లేక) భాగించినా అసమానత్వపు క్రమము మారుతుంది.

a, b, c లు మూడు సంఖ్యలు $c<0$ అయి,

(i) $a<b$ అయితే

$ac>bc$ మరియు $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$

ఇదే విధంగా

(ii) $a>b$ అయితే

$ac<bc$ మరియు $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$ అగును.

4. సంక్రమణ ధర్మము (Transitive Property) : a, b, c లు వాస్తవ సంఖ్యలై $a<b$ మరియు $b<c$ అయితే $a<c$ అగును.

ఇదే విధంగా

$a>b$ మరియు $b>c$ అయితే $a>c$ అగును.

దీనినే "సంక్రమణ ధర్మము" అని అంటారు.

5. ధర్మము : a, b లు ఒకే గుర్తు కలిగిన సంఖ్యలై

$a<b$ అయితే $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ మరియు

$a>b$ అయితే $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ అగును.

* * *

9. రేఖీయ సమీకరణాలు మరియు రేఖీయ అసమీకరణాలు

(Linear Equations & Linear Inequations)

అనిశ్చిత వాక్యము (Open Sentence) : x విలువ తెలియనంత వరకు $x+7 = 10$ అను వాక్యము సత్యమో, అసత్యమో చెప్పలేము. అట్టి వాక్యమును "అనిశ్చిత వాక్యము" (Open Sentence) అని అంటారు.

* అనిశ్చిత వాక్యములో కనీసం ఒక చరరాశి అయినా ఉంటుంది.

ఉదా : $x+3 = 5$ అనిశ్చిత వాక్యంలో x ను చరరాశి అని అందురు.

సమీకరణము (Equation) : ఏదైనా అనిశ్చిత వాక్యమందు సమానత్వపు గుర్తు ("=") ఉండునో ఆ వాక్యాలను సమీకరణాలు అంటారు.

ఉదా : $2x+3 = 9$.

రేఖీయ సమీకరణము (Linear Equation) : x, y వంటి రెండు చరరాశులతో కూడియున్న ప్రథమ పరిమాణ సమీకరణాన్ని రెండు చరరాశులలో "రేఖీయ సమీకరణము" అని అంటారు.

ఉదా : $x+y = 3$.

సాధన (లేక) మూలము (Solution (or) Root) : సమీకరణాన్ని తృప్తిపరచు (లేదా) సత్యవాక్యముగా చేయు విలువల జతను ఆ సమీకరణానికి "సాధన" లేక "మూలము" అని అంటారు.

సాధన సమితి (Solution Set) : సాధనలన్నియు కలిగియున్న సమితిని ఆ సమీకరణానికి "సాధన సమితి" అని అంటారు.

ఉదా : $x+y = 10$ సమీకరణ సాధనలు

$x = 1; y = 9$

$x = 2; y = 8$

$x = 3; y = 7;$..................

$\therefore$ సాధన సమితి = $\{(1,9); (2,8); (3,7);................\}$

క్రమయుగ్మము (Ordered Pair) : x ను ప్రథమ నిరూపకము గాను; y ను ద్వితీయ నిరూపకంగాను వ్రాస్తు x, y లను కుండలీకరణములో ఉంచగా ఏర్పడు దానిని "క్రమయుగ్మము" అని అంటారు.

గమనిక : x, y చరరాశులను ఏ సమితి నుండి ఎన్నుకుంటామో ఆ సమితిని "పునఃస్థాపన సమితి" (Replacement Set) అని అంటారు.

సమీకరణాల వ్యవస్థ (System of Equation) : $a \neq 0$ లేదా $b \neq 0$ కు సమీకరణం సాధారణ రూపము $ax+by+c = 0$.

* సమీకరణము నందు కనీసం ఒక చరరాశి అయిన ఉండవలెను.

* రెండు సమీకరణాలను ఒకేసారి తృప్తిపరిచే ప్రతి క్రమయుగ్మమును సమీకరణాలకు ఒక సాధన.

అట్టి సాధనల సమితిని దత్త సమీకరణముల జతకు సాధన సమితి అందురు.

గమనిక : ఒక సమీకరణము నందు రెండు చరరాసులు ఉన్నప్పుడు ఆ సమీకరణాన్ని తృప్తిపరచు క్రమయుగ్మాలు అనేకం ఉంటాయి.

* రెండు చరరాశులు గల సమీకరణాన్ని సాధించుటకు ఆ రెండింటికి సంబంధము తెలియజేయు ఒక సమీకరణము మాత్రమే సరిపోదు. మొదటి దానితో నిమిత్తము లేని రెండవ సమీకరణము కూడా అవసరం.

పరస్పరాధార సమీకరణాలు (Dependent Equations) : $ax+by+c = 0$ మరియు $kax+kby+kc = 0$ అనే సమీకరణాలను "పరస్పరాధార సమీకరణాలు" అని అంటారు.

* పరస్పరాధార సమీకరణాల సాధన సమితి అపరిమితము.

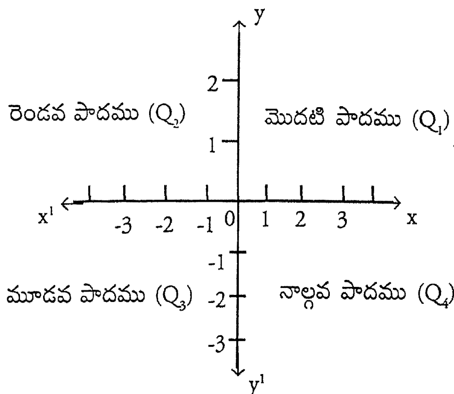
అసంగత సమీకరణాలు (Inconsistent Equations) : $a_1x+b_1y+c_1 = 0$ మరియు $a_2x+b_2y+c_2 = 0$ అనే సమీకరణాలలో x, y ల గుణకాలు వరుసగా a_1, a_2 మరియు b_1, b_2 మరియు స్థిరపదాలు c_1, c_2.

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ అయితే ఇచ్చిన సమీకరణాలను "అసంగత సమీకరణాలు" అని అంటారు.

* అసంగత సమీకరణాల సాధన సమితి శూన్యసమితి.

* $a_1x+b_1y+c_1 = 0$; $a_2x+b_2y+c_2 = 0$ సమీకరణాలలో $a_1b_2 \neq a_2b_1$ అయితే ఇచ్చిన సమీకరణాల సాధన

$$x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad ; \quad y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$



* నిలువు సంఖ్యా రేఖను y - అక్షము అనియు, అడ్డ సంఖ్యా రేఖను x - అక్షము అనియు అంటారు.

x - అక్షాన్ని $x^1 0x$ రేఖ లేదా, $\overline{x^1 x}$

y - అక్షాన్ని $y^1 0y$ రేఖ లేదా $\overline{y^1 y}$ అని అంటారు.

* x, y అక్షముల ఖండన బిందువును ఆది బిందువు (లేక) మూల బిందువు అని అంటారు. దీనిని 0 (0,0) తో సూచిస్తాము.

* x, y అక్షాలు వాస్తవ సంఖ్యారేఖలు.

పాదాలు (Quadrants) : x, y అక్షాలు తలాన్ని నాలుగు భాగాలుగా విభజిస్తున్నాయి. ఈ భాగాలను పాదాలు అంటారు. ఈ పాదాలను అపసవ్యదిశలో 1; 2, 3 మరియు 4 అనే సంఖ్యలచే సూచిస్తారు.

* తలంలోని ప్రతి బిందువును ఒకే ఒక వాస్తవ సంఖ్యా క్రమయుగ్మము ద్వారా గుర్తిస్తారు.

* 1 వ పాదమును Q_1 తో; 2 వ పాదమును Q_2 తో; 3 వ పాదమును Q_3 తో మరియు 4 వ పాదమును Q_4 తో సూచిస్తాము.

* మూల బిందువుకు కుడివైపున ఉన్న x - అక్షాన్ని ($\overline{0x}$ రేఖను) ధన x - అక్షము అనియు మరియు మూల బిందువుకు ఎడమవైపున ఉన్న x - అక్షాన్ని ($\overline{0x^1}$ రేఖను) ఋణ x - అక్షమనియు అంటారు.

* మూల బిందువుకు పై వైపున ఉన్న y - అక్షాన్ని ($\overline{oy}$ రేఖను) ధన y - అక్షము అనియు మరియు మూల బిందువుకు క్రిందివైపున ఉన్న y - అక్షాన్ని ($\overline{oy^1}$ రేఖను) ఋణ y - అక్షమనియు అంటారు.

* P(x,y) అను బిందువునందు x ను ప్రథమ నిరూపకము (Abscissa) అనియు, y ను ద్వితీయ నిరూపకము (Ordinate) అని అంటారు.

* ప్రతి క్రమయుగ్మములోని ప్రథమ నిరూపకాన్ని x - నిరూపకము అని, ద్వితీయ నిరూపకాన్ని y - నిరూపకము అని అంటారు.

గమనిక : P అను బిందువు y - అక్షము నుండి 2 యూనిట్ల దూరంలోను, x-అక్షము నుండి 5 యూనిట్లు దూరంలోను ఉంటే P బిందువుకు సదృశమైన క్రమయుగ్మాన్ని (2, 5) గా సూచిస్తాము.

గమనిక : $(2,5) \neq (5,2)$

* తలంపై క్రమయుగ్మాలను సూచించే విధానాన్ని మొదటిసారిగా ఫ్రెంచి గణిత శాస్త్రవేత్త రెనేడె కార్టె ఉపయోగించినారు.

* అక్షాలను నిరూపకాక్షాలనియు; తలాన్ని నిరూపక తలము (లేక) కార్టిసియన్ తలము అని అంటారు.

* నిరూపకతలంలో ప్రతి బిందువుకు సదృశంగా ఒకే ఒక వాస్తవ సంఖ్యా క్రమయుగ్మం ఉంటుంది.

* ప్రతి వాస్తవ సంఖ్యా క్రమయుగ్మానికి సదృశంగా ఒకే ఒక బిందువు ఉంటుంది.

*

x, y ల గుర్తులు	బిందువు P(x, y) ఉండే చోటు
x=0; y=o	మూల బిందువు
x>0; y=o	ధన x - అక్షంపై
x<0; y=o	ఋణ x - అక్షంపై
x=0; y>o	ధన y - అక్షంపై
x=0; y<o	ఋణ y - అక్షంపై
x>0; y>o	Q_1 పాదంలో
x<0; y>o	Q_2 పాదంలో
x<0; y<o	Q_3 పాదంలో
x>0; y<o	Q_4 పాదంలో

గమనిక : $Q_1 \cap Q_2 = \varphi$; $Q_2 \cap Q_3 = \varphi$;................

* x - అక్షంపై y - నిరూపకము సున్నా (0).
  $\therefore$ x - అక్ష సమీకరణం $y = 0$.
* y - అక్షంపై x - నిరూపకము సున్నా (0).
  $\therefore$ y - అక్ష సమీకరణము $x = 0$.
* x - అక్షానికి సమాంతరంగా మూలబిందువు నుండి K యూనిట్లు దూరంలో గల సరళరేఖా సమీకరణము $y = k$.
* y - అక్షానికి సమాంతరంగా మూలబిందువు నుండి K యూనిట్లు దూరంలో గల సరళరేఖా సమీకరణము $x = k$.
* $(x,y) \in R$; $ax+by+c = 0$ అనే రూపంలో గల ఏ సమీకరణము అయిన సరళరేఖ అగును. అట్టి సమీకరణాన్ని "రేఖీయ సమీకరణము" అని అంటారు. $[a \neq 0$ లేదా $b \neq 0]$
* ఏ సరళరేఖనైనా గీయడానికి రెండు క్రమయుగ్మాలు చాలు.
* $y = mx$ అను రేఖ యొక్క వాలు 'm'
* x - అక్షము యొక్క వాలు మరియు x - అక్షానికి సమాంతరముగా ఉండే ఏ రేఖ యొక్క వాలు అయినను "సున్నా" (0) అగును.
* y - అక్షము యొక్క వాలు మరియు y - అక్షానికి సమాంతరంగా ఉండే ఏ రేఖ యొక్క వాలు అయినను నిర్వచించబడదు.
* $m \in R$ అయినప్పుడు $y=mx$ అనునది ఒక సరళరేఖను సూచించును. ఈ రేఖ ఆది బిందువు (మూల బిందువు) గుండా పోతుంది.
* $y=mx+c$ రూపంలో గల సరళరేఖలను వాలు – అంతరఖండ రూపంలో సరళరేఖలు అంటారు. ఇది మూల బిందువు గుండా పోదు. ఇందులో వాలు 'm'; y అంతర ఖండము 'c'.
* $y=mx+c$ రూపంలో ఉండే సరళరేఖ y - అక్షాన్ని ఖండించే బిందువు (0, c)
* వాలులు సమానంగా ఉండే సరళరేఖలు సమాంతరంగా ఉంటాయి.
* రెండు చరరాశులలోని రేఖీయ సమీకరణపు రేఖా చిత్రం ఒక సరళరేఖ అగును.

  ఈ రేఖా చిత్రపు సమీకరణాన్ని తృప్తిపరిచే ఏ క్రమయుగ్మాన్నైనా ఆ దత్త సమీకరణపు "సాధన" అంటారు.
* రేఖీయ సమీకరణాల వ్యవస్థకు ఒకే ఒక సాధన ఉంటే దానిని "సంగత వ్యవస్థ" అని అంటారు.

ఈ రేఖలకు ఒకే ఒక ఉమ్మడి బిందువు ఉండును. ఈ ఉమ్మడి బిందువునే ఖండన బిందువు అంటారు.

* రెండు సరళరేఖలకు ఒక బిందువు కూడా ఉమ్మడిగా లేకుంటే అట్టి వ్యవస్థను "అసంగత వ్యవస్థ" అని అంటారు.
* అసంగత వ్యవస్థలోని రేఖలు సమాంతరంగా ఉంటాయి.

రేఖీయ అసమీకరణము

రేఖీయ అసమీకరణాలు - వాటి రేఖా చిత్రాలు (Linear Inequations and their Graphs) :

* ప్రతి రేఖ ఒక తలాన్ని మూడు వియుక్త సమితులుగా విభజిస్తుంది.
* $ax+by+c = 0$ సూచించే రేఖ తలాన్ని క్రింద తెలిపిన మూడు భాగాలుగా విభజిస్తుంది.

  (i) $ax+by+c = 0$ పైనున్న బిందువుల సమితి.

  (ii) $ax+by+c = 0$ కి ఒక వైపునున్న బిందువులన్నింటి సమితి.

  (iii) $ax+by+c = 0$ కి మరోవైపునున్న బిందువులన్నింటి సమితి.

గమనిక : (ii) మరియు (iii) లను అర్ధతలాలు అంటారు.

* $ax+by+c = 0$ అనే సమీకరణము తలాన్ని రెండు ప్రదేశాలు (అర్ధ తలాలు) గా విభజిస్తుంది. వీటిలో

  (i) $ax+by+c<0$ ని;

  (ii) $ax+by+c>0$ ని ధృవపరుస్తాయి.

* $ax+by+c<0$ యొక్క సాధన సమితి

  (i) $c<0$ అయితే $(0,0)$ ని కలిగియున్న ప్రదేశాన్ని

  (ii) $c>0$ అయితే $(0,0)$ ను కలిగిలేని ప్రదేశాన్ని సూచిస్తుంది.

* $ax+by+c>0$ యొక్క సాధన సమితి

  (i) $c>0$ అయితే $(0,0)$ ని కలిగియున్న ప్రదేశాన్ని

  (ii) $c<0$ అయితే $(0,0)$ ను కలిగిలేని ప్రదేశాన్ని సూచిస్తుంది.

గమనిక : $c=0$ అయిన సందర్భంలో $(0,0)$;

$ax+by=0$ పై బిందువు అవుతుంది. కావున మరో బిందువు ($ax+by=0$ పై లేని) ను తీసుకొని $ax+by>0$ మరియు $ax+by<0$ ల సాధన సమితులను కనుగొనవచ్చును.

* * *

10. వైశ్లేషిక రేఖా గణితము
(Analytical Geometry)

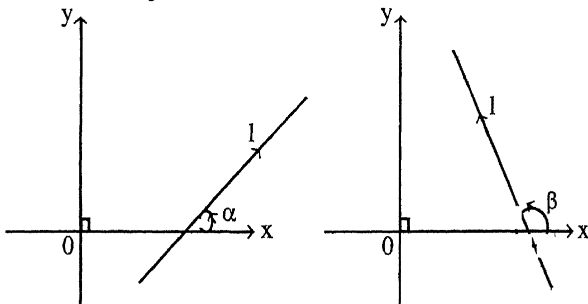
వైశ్లేషిక రేఖా గణితము (లేదా) నిరూపక రేఖా గణితము (Analytical Geometry (or) Co-ordinate Geometry) : తలంలోని బిందువులను వాస్తవ సంఖ్యా క్రమయుగ్మాలతో అనుసంధానము చేయడం వల్ల రేఖా గణితములో వివిధ భావాలను బీజీయ సమీకరణాలతో వివరించడం; విశ్లేషించడం, సుసాధ్యమైంది. ఇట్టి రేఖా గణితాన్నే "నిరూపక రేఖా గణితం" లేదా "వైశ్లేషిక రేఖా గణితం" (లేదా) "కార్టిసియన్ రేఖా గణితము" అని అంటారు.

* వైశ్లేషిక రేఖా గణితాన్ని ఫ్రెంచ్ గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు రెనెడెకార్ట్ (Rene Des Cartes) కనుగొన్నాడు.

ఏటవాలు తనము (Inclination) : ఒక రేఖ x-అక్షముతో చేసే కోణాన్ని ఆ రేఖ "ఏటవాలు తనము" అని అంటారు.

* ఒక రేఖ ఏటవాలు తనాన్ని x-అక్షము ధన దిశనుండి అపసవ్యదిశలో కొలుస్తాము.

* ఒక రేఖ యొక్క ఏటవాలు తనము α అయితే $0^0 \le \alpha \le 180^0$ అగును.



రేఖవాలు (Slope of a Line) : ఒక రేఖపై ఉన్న ఏ రెండు బిందువులకైననూ వాటి y-నిరూపకాల భేదానికి; x-నిరూపకాల భేదానికి గల నిష్పత్తి ఒక స్థిరరాశి, ఆ స్థిరరాశినే ఆ రేఖవాలు అంటారు.

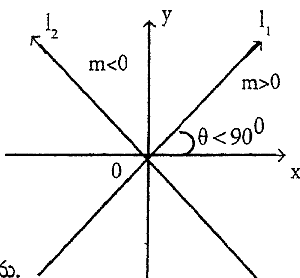
(లేదా)

ఒక సరళరేఖ యొక్క ఏటవాలు తనము 'θ' అయిన '$\tan\theta$' ను ఆ సరళరేఖ యొక్క వాలు అని అందురు.

$$m = \tan\theta$$

గమనిక : (i) m ధనాత్మకమవుతూ, m విలువ పెరిగిన కొలది, దాని ఏటవాలు తనవము 0, 90^0 సమీపిస్తూంటుంది.

(ii) m ఋణాత్మకమైన, m విలువ తగ్గినకొలది, ఏటవాలుతనము 90^0 దాటిపోయి 180^0 సమీపిస్తుంటుంది.



(iii) m>0 అయితే, $0^0 \le \theta \le 90^0$ అగును.

(iv) m<0 అయితే, $90^0 \le \theta \le 180^0$ అగును.

* $|a|+|b| \ne 0$ అయినప్పుడు $ax+by+c = 0; a, b, c \in R$ ఒక సరళరేఖకు సమీకరణాన్ని తెలుపుతుంది.

* ప్రతి వాస్తవ సంఖ్య m కి, y=mx ఒక సరళరేఖను సూచిస్తుంది. ఈ రేఖ m వాలుతో మూల బిందువు గుండా పోవును.

* $A(x_1, y_1)$; $B(x_2, y_2)$ అనే బిందువుల గుండాపోయే సరళరేఖ వాలు

$$m = \tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{y నిరూపకాల భేదము}}{\text{x నిరూపకాల భేదము}}$$

* y = mx+c అనే సమీకరణం 'm' వాలు, y - అంతరఖండము 'c' కలిగిన ఒక సరళరేఖను సూచిస్తుంది.

* ax+by+c = 0 అనే సరళరేఖ యొక్క వాలు $m = \frac{-a}{b} = \frac{\text{-x గుణకం}}{\text{y గుణకం}}$

* X - అక్షానికి సమాంతరంగా ఉండే ఏ రేఖవాలు అయినా సున్నా. ప్రత్యేకించి x - అక్షం వాలు సున్నా.

* Y - అక్షానికి సమాంతరంగా ఉన్న రేఖవాలును నిర్వచించలేము. ప్రత్యేకించి y - అక్షంవాలు నిర్వచించబడదు.

* ఒక తలంపై రెండు రేఖలు తీసుకొంటే, అవి ఖండించుకొనవలెను (లేక) సమాంతరంగా ఉండవలెను.

* రెండు రేఖలు సమాంతరముగా ఉంటే వాటి వాలులు సమానం. $(m_1 = m_2)$

* రెండు సరళరేఖల వాలుల లబ్ధము విలువ "-1" అయితే, అవి పరస్పరము లంబముగా ఉంటాయి. $(m_1 m_2 = -1)$

* $y = mx + c_1$; $y = mx + c_2$ లు సమాంతరముగా ఉండే రెండు రేఖల సమీకరణాలను సూచిస్తాయి.

* సమాంతరంగా ఉండే రెండు రేఖల సమీకరణాల్లోని x, y ల గుణకాలు ఒకే నిష్పత్తిలో ఉంటాయి. లేదా ఒకే విధంగా ఉంటాయి.

  ఈ సమీకరణాలలో స్థిరాంకాలు మాత్రం వేరుగా ఉంటాయి.

* ఒక సరళరేఖ యొక్క వాలు 'm' అయితే దానికి లంబముగా ఉండే సరళరేఖ వాలు $\frac{-1}{m}$ అగును.

* x - అక్షంపై గల రెండు బిందువులు $A(x_1, 0)$; $B(x_2, 0)$ ల మధ్య దూరము $= |x_1 - x_2|$ యూనిట్లు,

* y - అక్షంపై గల రెండు బిందువులు $A(0, y_1)$; $B(0, y_2)$ ల మధ్య దూరము $= |y_1 - y_2|$ యూనిట్లు

* $A(x_1, y_1)$; $B(x_2, y_2)$ అనే రెండు బిందువుల మధ్య దూరము

  $$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

* మూల బిందువు 0 (0,0) నుండి $A(x_1, y_1)$ అనే బిందువుకు గల దూరము

  $$= \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

* $A(x_1, y_1)$; $B(x_2, y_2)$ అనే బిందువులను కలుపు రేఖ యొక్క మధ్య బిందువు $= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

* $P(x_1, y_1)$; $Q(x_2, y_2)$ బిందువులను కలిపే రేఖా ఖండాన్ని m:n నిష్పత్తిలో

(i) అంతరంగా విభజించే బిందువు $= \left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}; \frac{my_2 + ny_1}{m+n} \right)$

(ii) బాహ్యంగా విభజించే బిందువు $= \left(\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}; \frac{my_2 - ny_1}{m-n} \right)$

* $A(x_1, y_1); B(x_2, y_2)$ బిందువులను కలుపు రేఖను

(i) x - అక్షం విభజించు నిష్పత్తి $= -y_1 : y_2$

(ii) y - అక్షం విభజించు నిష్పత్తి $= -x_1 : x_2$

త్రిధాకరణ బిందువులు (Points of Trisection) : రెండు బిందువులను కలుపు రేఖను 1:2 మరియు 2:1 నిష్పత్తిలో విభజించు బిందువులను "త్రిధాకరణ బిందువులు" అని అంటారు.

* $A(x_1, y_1); B(x_2, y_2)$ బిందువులను కలుపు రేఖ యొక్క త్రిధాకరణ

బిందువులు $\left(\frac{x_1 + 2x_2}{3}; \frac{y_1 + 2y_2}{3} \right)$ మరియు

$\left(\frac{2x_1 + x_2}{3}; \frac{2y_1 + y_2}{3} \right)$ అవుతాయి.

మధ్యగత రేఖలు (Medians) : త్రిభుజ భుజాల మధ్య బిందువు నుండి దాని ఎదుటి శీర్షాలను కలుపగా ఏర్పడు రేఖలను మధ్యగత రేఖలు అంటారు.

* త్రిభుజ మధ్యగత రేఖలు అనుషక్తాలు అవుతాయి.

కేంద్రాభాసము (Centroid) : త్రిభుజ మధ్యగత రేఖల మిళిత బిందువును "కేంద్రాభాసము" (లేదా) "గురుత్వకేంద్రము" అని అంటారు.

* త్రిభుజ మధ్యగత రేఖలను కేంద్రాభాసము 2:1 నిష్పత్తిలో విభజించును.

* $A(x_1, y_1); B(x_2, y_2); C(x_3, y_3)$ లు శీర్షాలుగా గల త్రిభుజ

కేంద్రాభాసము $G = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$

* ax+by+c = 0 అను రేఖ x - అక్షాన్ని $\left(\frac{-c}{a}, 0\right)$ బిందువు వద్ద, y - అక్షాన్ని $\left(0, \frac{-c}{a}\right)$ బిందువు వద్ద ఖండించును.

* y=mx+c సరళరేఖ y - అక్షాన్ని (0, c) వద్ద ఖండిస్తుంది.

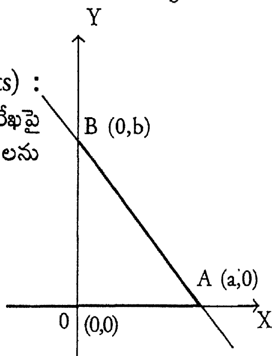
అంతర ఖండాలు (Intercepts) : ఒక సరళరేఖ x - అక్షాన్ని (a, 0) వద్ద మరియు y - అక్షాన్ని (0, b) వద్ద ఖండిస్తే

'a' ను x - అంతర ఖండము అని

'b' ను y - అంతర ఖండము అని అంటారు.

* ax+by+c = 0 సరళరేఖ యొక్క x - అంతర ఖండము $= \frac{-c}{a}$

y - అంతర ఖండము $= \frac{-c}{b}$



సరేఖీయ బిందువులు (Collinear Points) **:**
ఒకే తలంలోని కొన్ని బిందువులు ఒక దత్త సరళరేఖపై ఉంటే (వ్యవస్థితమైతే) అట్లాంటి బిందువులను "సరేఖీయ బిందువులు" అంటారు.

* ΔABC వైశాల్యము = 0 అయితే,
A, B, C లు సరేఖీయాలు అవుతాయి.

* A, B, C లు సరేఖీయాలు అయితే $\overline{AB}$ వాలు = $\overline{BC}$ వాలు = $\overline{CA}$ వాలు.

* $|\overline{AB}| + |\overline{BC}| = |\overline{CA}|$ (లేదా) $|\overline{BC}| + |\overline{CA}| = |\overline{AB}|$ (లేదా) $|\overline{CA}| + |\overline{AB}| = |\overline{BC}|$ అయితే A, B, C బిందువులు సరేఖీయాలు అవుతాయి.

* $A(x_1, y_1)$; $B(x_2, y_2)$; $C(x_3, y_3)$ శీర్షాలుగా గల త్రిభుజము యొక్క వైశాల్యము $\Delta = \frac{1}{2}\left|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right|$ చదరపు యూనిట్లు. (లేదా)

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & x_2 - x_3 \\ y_1 - y_2 & y_2 - y_3 \end{vmatrix}$$ చ. యూనిట్లు.

$$\Delta = \frac{1}{2}\left|\sum (x_1 y_2 - x_2 y_1)\right|$$ చ. యూనిట్లు.

* 0 (0,0); $A(x_1, y_1); B(x_2, y_2)$ శీర్షాలతో ఏర్పడు త్రిభుజము యొక్క వైశాల్యము $\Delta = \frac{1}{2}\left|x_1 y_2 - x_2 y_1\right|$ చ. యూనిట్లు.

సరళరేఖ యొక్క విభిన్న రూపాలు (Straight lines in Various forms):

(i) **వాలు లేదా ఉత్పలం రూపము** (Slope form) : మూల బిందువు గుండా పోతూ, m వాలుగా గల సరళరేఖా సమీకరణము $y=mx$

(ii) **వాలు-అంతరఖండ రూపము** (Slope-intercept form) : 'm' వాలు కలిగి, y - అక్షంపై 'c' అంతరఖండాన్ని చేసే సరళరేఖా సమీకరణము $y=mx+c$

(iii) **వాలు-బిందు రూపము** (Slope-point form) : m వాలు కలిగి (x_1, y_1) అనే బిందువు గుండా పోయే సరళరేఖా సమీకరణము $y-y_1 = m(x-x_1)$.

(iv) **అంతరఖండాల రూపము** (Intercepts form) : x - అంతర ఖండము 'a' మరియు y - అంతరఖండము 'b' గా గల సరళరేఖా సమీకరణం

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

(v) **రెండు బిందువుల రూపము** (Two point form) : (x_1, y_1); (x_2, y_2) అనే రెండు బిందువుల గుండా పోయే సరళరేఖా సమీకరణము

$$y-y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1) \text{ (లేదా) } \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

(vi) **సాధారణ రూపము** (General form) : x, y లలో నున్న ప్రథమ పరిమాణ సమీకరణము $ax+by+c=0$; $|a| + |b| \neq 0$ ఎల్లప్పుడూ ఒక సరళరేఖను సూచించును.

గమనిక : (x_1, y_1) బిందువు గుండా పోతూ 'm' వాలు కలిగిన రేఖను లంబంగా ఉండే సరళరేఖా సమీకరణము.

$$y-y_1 = \frac{-1}{m}(x-x_1)$$

* $ax+by+c=0$ సరళరేఖకు సమాంతరంగా ఉండే సరళరేఖా సమీకరణము

  $ax+by+k=0$ రూపంలో ఉండును. (ఇచ్చట k అనునది స్థిరాంకము)

* $ax+by+c=0$ సరళరేఖకు లంబముగా ఉండే సరళరేఖా సమీకరణము

  $bx-ay+k=0$ రూపంలో ఉండును. (ఇచ్చట k స్థిరాంకము)

* (x_1, y_1) బిందువు గుండా పోతూ $ax+by+c=0$ కు సమాంతరముగా ఉండే సరళరేఖా సమీకరణము $a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$ (లేదా) $ax+by=ax_1+by_1$

* $ax+by+c=0$ కు లంబంగా ఉంటూ (x_1, y_1) బిందువు గుండా పోయే సరళరేఖా సమీకరణము $b(x-x_1)-a(y-y_1)=0$ (లేదా) $bx-ay=bx_1-ay_1$

* * *

11. ప్రాథమిక సంఖ్యావాదము
(Elementary Number Theory)

సరిసంఖ్యలు (Even Numbers) : 2 చే నిశ్శేషంగా భాగింపబడు పూర్ణసంఖ్యలను సరిసంఖ్యలు అని అంటారు.

* $\{0, \pm 2, \pm 4, ...\}$ సరిపూర్ణసంఖ్యల సమితి.
* సరిసంఖ్య సాధారణ రూపము '2n'
* రెండు సరిసంఖ్యల మొత్తము; భేదము మరియు లబ్ధము సరిసంఖ్యయే అగును.

బేసి సంఖ్యలు (Odd Numbers) : 2 చే భాగించగా '1' శేషము వచ్చు సంఖ్యలను బేసిసంఖ్యలు అని అంటారు.

* $\{\pm 1, \pm 3, \pm 5..............\}$ బేసి పూర్ణసంఖ్యల సమితి.
* బేసి సంఖ్య సాధారణరూపము 2n+1 (ఇచ్చట 'n' అనునది ఒక పూర్ణసంఖ్య)
* రెండు బేసి సంఖ్యల మొత్తము మరియు భేదము సరిసంఖ్య అగును.
* రెండు బేసి సంఖ్యల లబ్ధము బేసిసంఖ్య అగును.

ప్రధాన సంఖ్యలు (లేక) ప్రధానాంకాలు (Prime Numbers) : ఒకటి కంటె పెద్దదైన ప్రతి సహజసంఖ్యకు ఒకటి మరియు అదే సంఖ్య తప్ప వేరే ఇతర కారణాంకాలు లేకుంటే అట్టి సంఖ్యను "ప్రధాన సంఖ్య" అని అంటారు.

గమనిక : ప్రధాన సంఖ్యలను ప్రధానాంకాలు అనికూడా అంటారు.

ఉదా : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17,................

* 2 అనేది సరిప్రధాన సంఖ్య.

సంయుక్త సంఖ్యలు (Composite Numbers) : ప్రధాన సంఖ్య కానట్టి సంఖ్యను "సంయుక్త సంఖ్య" అని అంటారు.

ఉదా : 4, 6, 8, 9, 10, 12,................

* ప్రతి సంయుక్త సంఖ్యకు కనీసము మూడు కారణాంకాలు ఉంటాయి.
* ప్రతి సంయుక్త సంఖ్యకు 1 మరియు అదే సంఖ్య కాక వేరే ఇతర కారణాంకము కనీము ఒకటైనా ఉంటుంది.
* ఒకటి (1) అనేది ప్రధాన సంఖ్య కాదు; సంయుక్త సంఖ్య కాదు.

* సహజ సంఖ్యలను పరస్పర వియుక్త ఉపసమితులుగా విభజించగలము.

  (a) {1} (b) {ప్రధాన సంఖ్యలు} (c) {సంయుక్త సంఖ్యలు}

కవల ప్రధానాంకాలు (Twin Prime Numbers) : ఏవేని రెండు ప్రధానాంకాల భేదము '2' అయితే ఆ ప్రధానాంకాలను కవల ప్రధానాంకాలు అని అంటారు.

ఉదా : (3,5); (5,7); (11,13); (17,19); (29,31);...............

* n = 1,2,3,4 అయినప్పుడు మాత్రమే $2^{2^n}+1$ అనే రూపంలో ఉన్న సంఖ్యలు ప్రధానాంకాలు అగును. (ఫెర్మా)

* n = 5 అయినప్పుడు $2^{2^n}+1$ ఒక సంయుక్త సంఖ్య. (అయిలర్)
* ఇటీవల వరకు కనుగొనిన ప్రధానాంకాలలో పెద్ద సంఖ్య $2^{756839}-1$. దీని యందు 2, 27, 832 అంకెలు ఉన్నాయి.

* a, b లు రెండు సహజ సంఖ్యలైతే a÷b అనునది సహజ సంఖ్య కావచ్చును, కాకపోవచ్చును. కావున సహజ సంఖ్య సమితిలో భాగాహారము సంవృతధర్మము కలిగి ఉండదు.

* a అనే సహజ సంఖ్యను b అనే సహజ సంఖ్య నిశ్శేషంగా భాగిస్తే a, b చే భాగింపబడుతుంది. లేక భాజనీయత కలిగి ఉంది అని అంటాము.

* a÷b = c మరియు c ఒక సహజ సంఖ్య అయితే a = bc అగును.

  అనగా a÷b = c అయ్యేట్లు సహజసంఖ్య c ఉంటే, b, a ని భాగిస్తుంది అంటాము.

* b, a ని భాగిస్తుంది అని చూపుటకు $\frac{b}{a}$ అనే గుర్తును వాడుతాము.

కారణాంకము; గుణిజము (Factor And Multiple) : b అనే సంఖ్య a ను నిశ్శేషంగా భాగిస్తే b ను a యొక్క కారణాంకము లేక భాజకము అని అంటాము. a ను b యొక్క గుణిజము అంటారు.

ఉదా : 24=6×4; 24 యొక్క కారణాంకాలు 6, 4

24 యొక్క భాజకాలు 6,4

6, 4 ల గుణిజము 24.

* ప్రతి సహజ సంఖ్యకు 1 కారణాంకము మరియు 1 మిక్కిలి చిన్న కారణాంకము.

* ప్రతి సహజ సంఖ్యకు అదే సంఖ్య కారణాంకమౌతుంది. అదే సంఖ్య మిక్కిలి పెద్ద కారణాంకము.

పరిపూర్ణ సంఖ్య (లేదా) శుద్ధ సంఖ్య (Perfect Number) : ఏదైన ఒక సంఖ్య యొక్క కారణాంకాల మొత్తము, ఆ సంఖ్యకు రెట్టింపు అయితే ఆ సంఖ్యను పరిపూర్ణ సంఖ్య (లేక) శుద్ధ సంఖ్య అంటారు.

ఉదా : 6, 28,................

(i) 6 యొక్క కారణాంకాలు = {1,2,3,6}

కారణాంకాల మొత్తము 1+2+3+6 = 12.

(ii) 28 యొక్క కారణాంకాలు = {1,2,4,7,14,28}

కారణాంకాల మొత్తము = 1+2+4+7+14+28 = 56

* $2^k - 1$ ఒక ప్రధానాంకమైతే $2^{k-1}(2^k - 1)$ అనునది ఒక శుద్ధ సంఖ్య అగును.

* శుద్ధ సంఖ్యలు అన్నియు $2^{k-1}(2^k - 1)$ రూపంలో ఉంటాయి. (అయిలర్)

* సహజ సంఖ్యా సమితిలో a/b అనగా b ను a భాగిస్తుంది అని అర్థం. a, b యొక్క కారణాంకము. దీనిని **aRb** తో సూచిస్తాము.

పరావర్తన సంబంధము (Reflexive Relation) : **aRa** i.e., a/a

సౌష్ఠవ సంబంధము (Symmetric Relation) : **aRb** అయినప్పుడు **bRa**

సంక్రమణ సంబంధము (Trasitive Relation) :

aRb ; **bRa** $\Rightarrow$ **aRc**

i.e., a/b ; $b/c \Rightarrow a/c$

ప్రతి సౌష్ఠవ సంబంధము (Anti-Symmetric Relation) :

aRb ; **bRa** $\Rightarrow a = b$

ప్రధాన కారణాంక విభజనము (Prime Factorisation) : ఒక సంఖ్యను ప్రధాన కారణాంకాల లబ్ధంగా వ్రాయడాన్ని "ప్రధాన కారణాంక విభజన" అని అంటారు.

అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతము లేక ఏకైక కారణాంక విభజన సిద్ధాంతము (Fundamental Theorem in Arithmetic (or) Unique Prime Factorisation Theorem) : ఒకటి కంటె పెద్దదైన ప్రతి సహజ సంఖ్యను ఏకైక ప్రధానాంకాల లబ్ధంగా వ్రాయవచ్చును.

ప్రధానాంకాల క్రమములో మార్పు ఉండవచ్చును. దీనినే "అంకగణిత ప్రాథమిక సిద్ధాంతము" లేక "ఏకైక కారణాంక విభజన సిద్ధాంతము" అని అంటారు.

ఉదా : $24 = 3\times2\times2\times2$

* n అనునది ఒక సహజ సంఖ్య.

b, c, d,.............అనునవి విభిన్న ప్రధానాంకాలు.

$n = b^p.c^q.d^r$ .... అయితే

n యొక్క కారణాంకాల సంఖ్య = (p+1).(q+1).(r+1)................ అగును.

ఉదా :

(i) $21 = 7^1\times3^1$

21 గల కారణాంకాల సంఖ్య = (1+1) (1+1) = 4

21 కారణాంకాల సమితి = {1,3,7,21}

(ii) $48 = 2^4\times3^1$

48 కారణాంకాల సంఖ్య = (4+1) (1+1) = 10

48 కి గల కారణాంకాల సమితి = {1,2,3,4,6,8,12,16,24,48}

గ.సా.కా. (H.C.F.) : రెండు సహజ సంఖ్యలకుగల కారణాంకములలో ఉమ్మడిగా ఉన్న కారణాంకములలో గరిష్టమైన దానిని ఆ సంఖ్యల గరిష్ట సామాన్య కారణాంకము (గ.సా.కా) లేక గరిష్ట సామాన్య భాజకము (గ.సా.భా) అంటారు.

* గరిష్ఠ సామాన్య కారణాంకము ఏకైకము.

* a/b అయితే a, b ల గ.సా.కా. a అవుతుంది.

* a, b సంఖ్యల గ.సా.కా. x అయితే,

ma, mb సంఖ్యల గ.సా.కా. mx అవుతుంది.

కనిష్ఠ సామాన్య గుణిజం (క.సా.గు) (Least Common Multiple) : రెండు కాని అంతకంటె ఎక్కువ గాని సంఖ్యల సామాన్య గుణిజాలలో మిక్కిలి చిన్న దానిని కనిష్ఠ సామాన్య గుణిజం (లేక) క.సా.గు. అంటారు.

* రెండు సంఖ్యల లబ్ధము = క.సా.గు. × గ.సా.కా.

పరస్పర ప్రధాన సంఖ్యలు (లేక) సాపేక్ష ప్రధాన సంఖ్యలు (Relative Prime Numbers) : ఏవైనా రెండు సంఖ్యలకు '1' మాత్రమే ఉమ్మడి కారణాంకమై వేరే ఉమ్మడి కారణాంకాలు లేకుంటే ఆ సంఖ్యలను పరస్పర ప్రధాన సంఖ్యలు (లేదా సాపేక్ష ప్రధాన సంఖ్యలు) అంటారు.

ఉదా : 8, 15 లు పరస్పర ప్రధాన సంఖ్యలు.

8, 15 ల గ.సా.కా. 1.

* రెండు పరస్పర ప్రధాన సంఖ్యల క.సా.గు. వాటి లబ్ధానికి సమానం అవుతుంది.

ఎందుకంటే సంఖ్యల లబ్ధము = క.సా.గు. × గ.సా.కా. మరియు

పరస్పర ప్రధాన సంఖ్యల గ.సా.కా. = 1.

* రెండు ప్రధాన సంఖ్యలు ఎప్పుడు పరస్పర ప్రధానాంకాలే.

* రెండు పరస్పర ప్రధాన సంఖ్యలు ప్రధానాంకాలే కానవసరంలేదు.

* a/b లేక a/c అయితే a/bc.
కాని విపర్యయము సత్యము కాదు.

అనగా a/bc అయితే a/b లేక a/c అనునది సత్యము కానవసరము లేదు.

గాస్ సిద్ధాంతము (Gauss Theorem) : a, b, c అనునవి మూడు సహజ సంఖ్యలు. c/ab ; c, a లు సాపేక్ష ప్రధానాంకాలు అయితే c/b అగును.

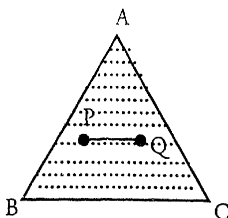
* * *

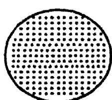
12. ఏకఘాత ప్రణాళిక
(Linear Programming)

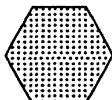
కుంభాకార సమితి (Convex Set) : ఒక తలంలోని సమితి X; P, $Q \in X$ లకు $\overline{PQ} \subseteq X$ అయ్యేటట్లుంటే దాన్ని "కుంభాకార సమితి" అని అంటారు.

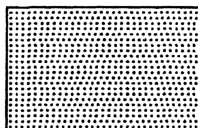
అనగా తలంలోని ఒక సమితి X కుంభాకార సమితి కావలెనన్న X లోని ఏ రెండు బిందువులను కలుపు రేఖా ఖండమైనా X లో భాగం కావలె.

ఉదా : ప్రక్క పటంలోని త్రిభుజాకార తలం ABC ఒక కుంభాకార సమితి. ఎందుకనగా ABC లోని ఏ రెండు బిందువులు P, Q లను తీసుకున్నా వాటిని కలుపు రేఖా ఖండము $\overline{PQ}$, ΔABC లలో భాగమై ఉంది. కావున, ఇదే విధంగా

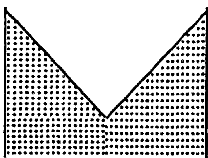


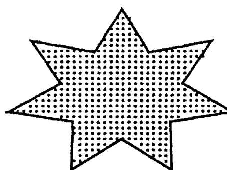






లు కుంభాకార సమితులను సూచిస్తాయి.





లు కుంభాకార సమితులను సూచించవు.

అనుకూల ప్రాంతం (Feasible Region (or) Polygonal Region) : ఒక ఏకఘాత ప్రణాళిక సమస్యలోని షరతుల సాధన సమితి ఒక కుంభాకార సమితి (సంవృత లేదా వివృత) అవుతుంది. ఈ సమితినే ఏకఘాత ప్రణాళికా సమస్యకు "అనుకూల ప్రాంతం" అంటారు.

ఇందులోని ప్రతి బిందువు ఆ ఏకఘాత ప్రణాళికా సమస్యకి ఒక సాధనమును ఇస్తుంది. ఇట్టి సాధనమునే "అనుకూల సాధనము" అంటారు.

ఏకఘాత ప్రణాళికా సమస్యలు (Linear Programming Problem) : x, y చలరాశుల్లో రేఖీయ అసమీకరణాల్లో వ్యక్తం చేయడానికి వీలయ్యే కొన్ని

పరిమితులకు లోబడి $f = ax+by$ ($a, b \in R$) ను గరిష్ఠ (లేదా) కనిష్ఠం చేయు సమస్యలే ఏకఘాత ప్రణాళికా సమస్యలు.

లక్ష్య ప్రమేయము (లేదా) లాభ ప్రమేయము (Objective Function (or) Profit Function) : ఒక ఏకఘాత ప్రణాళికా సమస్యలోని గరిష్ఠం లేదా కనిష్ఠం చేయవలసిన ప్రమేయాన్ని "లక్ష్య ప్రమేయం" లేదా "లాభ ప్రమేయం" అని అంటారు.

గమనిక : రెండు చలరాశుల్లో ఒక రేఖీయ అసమీకరణాల వ్యవస్థలోని అసమీకరణాలు పరిమిత సంఖ్యలో ఉంటే, అట్టి వ్యవస్థ సాధనము క్రింది వాటిలో ఏదో ఒకటి అవుతుంది.

(i) సంవృత కుంభాకార బహుభుజి

(ii) వివృత కుంభాకార బహుభుజి

(iii) శూన్య సమితి

సంవృత కుంభాకార బహుభుజి (Closed Convex Polygon) : పరిమిత శీర్షాలు గల ఒక బహుభుజిపైన మరియు అంతరములోని బిందువులన్నింటి సమితి.

వివృత కుంభాకార బహుభుజి (Open Convex Polygon) : పరిమిత శీర్షాలు గల ఒక బహుభుజి ఒక భుజంవైపు తెరిచి ఉంటే అట్టి బహుభుజిపైని మరియు అంతరములోని బిందువులన్నింటి సమితిని "వివృత కుంభాకార బహుభుజి" అని అంటారు.

ప్రాథమిక సిద్ధాంతము (The Fundamental Theorem) : ఒక సంవృత కుంభాకార బహుభుజిలోని బిందువుల వద్ద లక్ష్య ప్రమేయము $f = ax+by$ విలువలను గమనిస్తే, f యొక్క గరిష్ఠ లేదా కనిష్ఠ విలువ ఆ బహుభుజి యొక్క ఏదో ఒక శీర్షం వద్ద లభిస్తుంది.

తుల్య లాభ రేఖలు (Iso Profit Lines) : లక్ష్య ప్రమేయంచే నిర్ధారితమయిన సమాంతర రేఖలను "తుల్యలాభ రేఖలు" అని అంటారు.

గమనిక : తుల్యలాభ రేఖలు మూల బిందువు నుంచి దూరం జరిగినకొలది లక్ష్య ప్రమేయం f విలువ పెరుగుతుంది.

* * *

13. ప్రవచనాలు
(Statements)

ప్రవచనము (Statement) : ఒక వాక్యము సత్యము గాని, అసత్యముగాని ఏదో ఒకటి మాత్రమే అయ్యేటట్లుంటే దానిని "ప్రవచనము" అని అంటారు.

ఉదా : (i) సూర్యుడు తూర్పున ఉదయించును. ఈ వాక్యము నిజము. కావున ఇదొక ప్రవచనము.

(ii) $2+2 = 6$. ఈ వాక్యము అసత్యము. కావున ఇదొక ప్రవచనము.

(iii) $x^2 + y^2 = 100$ ప్రవచనము కాదు. ఎందుకంటే ఇది నిజమో కాదో తేల్చడానికి మరింత సమాచారం అవసరం.

* ఒక ప్రవచనం యొక్క సత్యవిలువ ఆ ప్రవచనము సత్యమో; అసత్యమో తెలుపుతుంది.
* ఒక ప్రవచనము సత్యమైతే ఆ ప్రవచనం సత్య విలువ T అనీ, అసత్యమైతే దాని సత్య విలువ F అనీ చూపుతాము.
* ప్రవచనాలను ఆంగ్ల భాషలోని చిన్న అక్షరాలయిన p, q, r,....లతో సూచిస్తాము.

గమనిక : ప్రవచనమంటే ఏకకాలంలో T, F సత్య విలువలను కలిగియుండని వాక్యము.

సంయోజకాలు-సంయుక్త ప్రవచనాలు (Connectives - Compound Statements) : చాలా ప్రవచనాలు కొన్ని సరళమైన ప్రవచనాలను కొన్ని ప్రత్యేక పదాలతో అనుసంధానం చేయడంవల్ల ఏర్పడ్డవే. ఇలా అనుసంధానం చేసే పదాలను "సంయోజకాలు" అని అంటారు.

సంయోజకాలతో సరళ ప్రవచనాలను అనుసంధానము చేయడంవల్ల ఏర్పడే ప్రవచనాలను "సంయుక్త ప్రవచనాలు" అని అంటారు.

** **ప్రధానమైన సంయోజకాలు** (Basic Connectives)

వ్యతిరేక ప్రవచనము (Negation of a Statement) : ఒక ప్రవచనము P ఇస్తే దాని తరువాత కాదు చేర్చగా వచ్చు మరొ ప్రవచనమే P యొక్క వ్యతిరేక ప్రవచనము.

* P యొక్క వ్యతిరేక ప్రవచనాన్ని '$\sim P$' తో సూచిస్తాము.

* వ్యతిరేక ప్రవచనము లోని '$\sim$' యొక్క సత్య పట్టిక.

వ్యతిరేక ప్రవచనము	
P	$\sim$P
T	F
F	T

ఉదా : (i) P : 3 ఒక ప్రధాన సంఖ్య.

$\sim$P : 3 ఒక ప్రధాన సంఖ్య కాదు.

ఇచ్చట P యొక్క సత్యవిలువ T. కావున $\sim$P యొక్క సత్యవిలువ F.

(ii) P : 2 ఒక బేసిసంఖ్య

$\sim$P : 2 ఒక బేసిసంఖ్యకాదు.

ఇచ్చట P యొక్క సత్యవిలువ F. కావున $\sim$P యొక్క సత్యవిలువ T.

వైకల్పికము (Disjunction) : ఈ సంయోజకమును '$\vee$' తో సూచిస్తూ "లేదా" అని చదువుతారు.

వైకల్పిక ($\vee$) సత్య పట్టిక :

వైకల్పికము		
p	q	p $\vee$ q
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

ప్రక్క పట్టిక నుండి రెండు ప్రవచనాలు p, q లను వైకల్పికంతో అనుసంధానం చేయడంవల్ల ఏర్పడే సంయుక్త ప్రవచనము p $\vee$ q (p లేదా q) యొక్క సత్య విలువలను తెలుసుకోనవచ్చును.

గమనిక : ఇచ్చట p లేదా q అంటే p లేదా q లేదా రెండూ అని అర్థం.

* రెండు ప్రవచనాల వైకల్పికము ఆ రెండు ప్రవచనాలు అసత్యం అయినప్పుడు మాత్రమే అసత్యమౌతుంది.

సముచ్ఛయము (Conjunction) : ఈ సంయోజకమును '$\wedge$' తో చూపుతూ 'మరియు' అని చదువుతాము.

సముచ్ఛయము		
p	q	p $\wedge$ q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

సముచ్ఛయ పట్టిక (Truth Table of Conjunction)

ప్రక్క పట్టిక విభిన్న p, q ల సత్యవిలువల కనుగుణంగా p మరియు q(p $\wedge$ q) సంయుక్త ప్రవచనము యొక్క సత్య విలువలను తెలుపుతుంది.

గమనిక : రెండు ప్రవచనముల సముచ్ఛయము, ఆ రెండు ప్రవచనాలు సత్యమయినప్పుడు మాత్రమే సత్యమవుతుంది.

అనుషంగికము (Implication or Conditional) : అనుషంగికమును '$\Rightarrow$' తో చూపుతూ, 'అయినప్పుడు' అని చదువుతారు.

p, q ల ప్రవచనాలను '$\Rightarrow$' తో అనుసంధానం చేయగా వచ్చే సంయుక్త ప్రవచనము $p \Rightarrow q$ ను "నియత ప్రవచనం" అని అంటారు.

దీన్ని 'p నుండి q వస్తుంది' లేదా 'p అయినప్పుడు q' అని చదువుతాము.

నియత ప్రవచనము		
p	q	$p \Rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

గమనిక : p సత్యము, q అసత్యము అయిన సందర్భంలో తప్ప $p \Rightarrow q$ అన్నివేళలా సత్యమవుతుంది.

* ఒక సత్య ప్రవచనం, అసత్య ప్రవచనంను ఇవ్వలేదు.

ద్విముఖానుషంగికము (లేదా) ద్వినియత ప్రవచనము (Biimplication (or) Biconditional) : ద్విముఖానుషంగికమును "$\Leftrightarrow$" తో చూపుతూ "అయినప్పుడు కేవలం అలా అయినప్పుడు మాత్రమే" అని చదువుతాము.

ఈ సంయోజకమును కలిగియున్న ప్రవచనమును "ద్వినియత ప్రవచనము" అని అంటారు.

ద్వినియత ప్రవచనము		
p	q	$p \Leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

p, q లతో ఏర్పడిన ద్వినియత ప్రవచనము $p \Leftrightarrow q$, ఆ రెండు ప్రవచనాలు ఒకే సత్య విలువను కలిగియున్నప్పుడు మాత్రమే సత్యమవుతుంది.

అనగా p, q లు వ్యతిరేక సత్యవిలువలను కలిగియుంటే $p \Leftrightarrow q$ యొక్క సత్య విలువ F.

ఒక నియుత ప్రవచనం యొక్క విపర్యయం; విలోమము మరియు ప్రతివర్తితము (Converse; Inverse And Contrapositive of a Conditional) :

* p, q లు రెండు ప్రవచనాలు అనుకొనుము.

(i) '$q \Rightarrow p$' ను నియత ప్రవచనము $p \Rightarrow q$ యొక్క విపర్యయం అంటారు.

(ii) '$\sim p \Rightarrow \sim q$' ను నియత ప్రవచనము $p \Rightarrow q$ యొక్క విలోమము అంటారు.

(iii) '$\sim q \Rightarrow \sim p$' ను నియత ప్రవచనము $p \Rightarrow q$ యొక్క ప్రతివర్తితం అంటారు.

p	q	$p \Rightarrow q$ నియత ప్రవచనం	$q \Rightarrow p$ విపర్యయం	$\sim p \Rightarrow \sim q$ విలోమము	$\sim q \Rightarrow \sim p$ ప్రతివరితం
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	F
F	T	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T

పునరుక్తి (Tautology) : కొన్ని సంయుక్త ప్రవచనాలు వాటి సత్యపట్టికలోని చివరి నిలువు వరుసలో T మాత్రమే కలిగి ఉంటాయి. అట్టి ప్రవచనాలను "పునరుక్తి ప్రవచనాలు" అని అంటారు.

ఉదా : "p లేదా q కానిది" అను ప్రవచనం ఒక పునరుక్తి.

p	$\sim p$	$p \vee (\sim p)$
T	F	T
F	T	T

ఉదా : $p \wedge (\sim q) \Rightarrow p$ అను ప్రవచనం ఒక పునరుక్తి.

p	q	$\sim q$	$p \wedge (\sim q)$	$(p \wedge (\sim q)) \Rightarrow p$
T	T	F	F	T
T	F	T	T	T
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T

విరోధాభాసము (Contradiction) : ఒక సంయుక్త ప్రవచనము యొక్క సత్య పట్టికలోని చివరి నిలువు వరుసలో F మాత్రమే కలిగి ఉంటే అట్టి ప్రవచనాన్ని "విరోధాభాసము" అని అంటారు.

ఉదా : $(p \wedge (\sim q)) \wedge ((\sim p) \vee q)$ ఒక విరోధాభాసము.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge (\sim q)$	$(\sim p) \vee q)$	r
T	T	F	F	F	T	F
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	F	T	F
F	F	T	T	F	T	F

గమనిక : r సత్య పట్టికలోని చివరి వరుసలో F లు మాత్రమే కలవు. కావున ఒక విరోధాభాసము.

ఉదా : "p మరియు p కానిది" ఒక విరోధాభాసము.

p	$\sim p$	$p \wedge (\sim p)$
T	F	F
F	T	F

తుల్య ప్రవచనాలు (Equivalent Statements) : రెండు సంయుక్త ప్రవచనాల సత్య పట్టికలు సమానమైతే అట్టి ప్రవచనాలను "తుల్య ప్రవచనాలు" అని అంటారు.

* P, Q లు రెండు సంయుక్త ప్రవచనాలు తుల్య ప్రవచనాలు అయితే $P \equiv Q$ తో సూచిస్తాం.

ఉదా : p ఏదేని ప్రవచనము అయితే p, $\sim(\sim p)$ లు తుల్య ప్రవచనాలు.

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
T	F	T
F	T	F

$$P \equiv \sim(\sim p)$$

క్రమ సంఖ్య	నియమము	ప్రవచనాల బీజగణితము
1.	అపవర్తిత నియమము	$p \vee p \equiv p$; $p \wedge p \equiv p$
2.	సహచర న్యాయాలు	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
3.	వినిమయ న్యాయాలు	$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$
4.	విభాగ న్యాయాలు	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
5.	తత్సమ న్యాయాలు	$p \vee f \equiv p; p \vee t \equiv t$ $p \wedge f \equiv f; p \wedge t \equiv p$
6.	పూరక న్యాయాలు	$p \vee (\sim p) \equiv t; p \wedge (\sim p) \equiv f$ $\sim(\sim p) \equiv p; \sim t \equiv f; \sim f \equiv t$
7.	డీమోర్గాన్ న్యాయాలు	$\sim(p \vee q) \equiv (\sim p) \wedge (\sim q)$ $\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p) \vee (\sim q)$

అనిశ్చిత వాక్యము (Open Sentence) : ఒకటి లేదా అంతకంటే ఎక్కువ చలరాశులు గల ఒక వాక్యంలో ఆ చలరాశులను దత్త సమితిలోని ఏదేని నిర్దిష్ట విలువలతో ప్రతిక్షేపించినప్పుడు సత్యముగాని, అసత్యముగాని మాత్రమే అయ్యేట్లుంటే ఆ వాక్యమును "అనిశ్చిత వాక్యము" అని అంటారు.

ఆ ప్రతిక్షేపణ సమితిని ఆ చలరాశుల ప్రదేశము అంటారు.

పరిమాపకాలు (Quantifiers) : 'అన్నింటికి'; 'కొన్నింటికి'; 'దేనికి కాదు'; 'ప్రతి ఒకదానికి' మరియు 'కనీసం ఒకటైనా కలదు' మున్నగు పద సముదాయాలు పరిమాణ భావాన్ని తెలియ చేస్తాయి.

ఇవి అనిశ్చిత వాక్యంలోని చలరాశులను పరిమాణాత్మకం చేస్తాయి. అందుచేత వీటిని "పరిమాపకాలు" అని అంటారు.

* 'అన్నింటికి' లేదా 'ప్రతి ఒక్కదానికి' అను పరిమాపకాన్ని "సార్వత్రిక పరిమాపకము" అని అంటారు.

* సార్వత్రిక పరిమాపకాన్ని "$\forall$" తో సూచిస్తాము.

* 'కొన్నింటికి' లేదా 'కనీసం ఒకటైనా ఉంది' అను పరిమాపకాన్ని 'అస్తిత్వ పరిమాపకము' అని అంటారు.

దీనిని '$\exists$' గుర్తుతో సూచిస్తాము.

* 'కాదు' అను పరిమాపకాన్ని '$\forall$' లేదా '$\exists$' పరిమాపకాలను ఉపయోగించి వ్రాయవచ్చు.

* * *

14. కరణులు
(Surds)

కరణి (Surd) : 'n' ఒక ధనపూర్ణాంకము $a>0$ మరియు ఒక అకరణీయ సంఖ్య a ను మరొ అకరణీయ సంఖ్య n వ ఘాతంగా వ్రాయ వీలు లేకపోతే $\sqrt[n]{a}$ (లేదా) $a^{1/n}$ (a కు ధన n వ మూలం) ను కరణి (లేదా) రాడికల్ అంటారు.

* $\sqrt[n]{a}$ అనేది n వ పరిమాణ కరణి.

  $\sqrt[n]{\ }$ గుర్తును రాడికల్ గుర్తు అంటారు. a ను రాడికెండ్ అంటాము.

* $\sqrt[n]{a}$ ఒక కరణి అంటే

  (i) a అకరణీయ సంఖ్య (ii) $\sqrt[n]{a}$ కరణీయ సంఖ్య అని అర్థము.

i.e., అకరణీయ సంఖ్య యొక్క కరణీయ వాస్తవ మూలాన్ని "కరణి" అని అంటారు.

* అకరణి గాని వాస్తవ సంఖ్యను "కరణి" అని అంటారు.

* $x^2 = 2$ అయ్యే విధంగా x అనే అకరణీయ సంఖ్య లేదు.

* $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$,...... లు కరణులు మరియు 2, 3, 4, 5,..లు అకరణీయ సంఖ్యలు.

కరణి పరిమాణము (Order of a Surd) : $\sqrt[n]{\ }$ యందు n ను కరణి లేదా రాడికల్ పరిమాణం అంటారు.

వర్గ కరణి (Quadratic Surd) : రెండో పరిమాణం గల కరణులను వర్గకరణులు అని అంటారు.

ఉదా : $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$,................

ఘనకరణి (Cubic Surd) : మూడో పరిమాణ కరణులను ఘనకరణులు అని అంటారు.

ఉదా : $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{7}$,..................

* $\sqrt[4]{7}$, $\sqrt[4]{9}$ లను నాలుగో పరిమాణ కరణులు (లేదా) చతుర్థపరిమాణ కరణులు అంటారు.

* $\sqrt[n]{a}$ అనేది n వ పరిమాణ కరణి.

** **కరణుల రకాలు** (Types of Surds) :

(i) **సరళ కరణి** (Simple Surd) : ఒకే పదంగల కరణిని "సరళకరణి" లేదా "ఏకపద కరణి" అని అంటారు.

ఉదా : $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[n]{a}$,....................

(ii) **మిశ్రమ కరణి** (Mixed Surd) : a ఒక అకరణీయ సంఖ్య, $\sqrt{b}$ ఒక కరణి అయితే $a+\sqrt{b}$; $a-\sqrt{b}$ లను మిశ్రమ కరణులు అంటారు. కొన్ని సందర్భాలలో $a\sqrt{b}$ ని కూడా మిశ్రమకరణి అంటారు.

ఉదా : $2-\sqrt{3}$, $2\sqrt{5}$, $5\sqrt[3]{14}$,.................

(iii) **సంయుక్త కరణి** (Compound Surd) : ఒక కరణి రెండు (లేదా) అంతకంటే ఎక్కువ కరణుల మొత్తం లేదా భేదము అయితే దానిని "సంయుక్త కరణి" అని అంటారు.

ఉదా : $\sqrt{2}-3\sqrt{3}+5\sqrt{13}$,........................

(iv) **ద్విపద కరణి** (Binomial Surd) : రెండు కరణులు గల సంయుక్త కరణిని "ద్విపద కరణి" అని అంటారు.

ఉదా : $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$; $\sqrt{7}-3\sqrt{13}$,....................

(v) **సరూపకరణులు** (Similar Surds) : రెండు కరణులు, ఒకే కరణి గుణిజాలు అయితే వాటిని "సరూపకరణులు" అని అంటారు.

ఉదా : $3\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}$,.....................

(vi) **విరూప కరణులు** (Dissimilar Surds) : రెండు కరణుల గుణిజాలు వేరువేరుగా ఉంటే వానిని "విరూప కరణులు" అని అంటారు.

ఉదా : $6\sqrt{2}$, $7\sqrt{3}$, $8\sqrt{7}$,.....................

(vii) **శుద్ధ కరణి** (Pure Surd) : ఒక కరణికి ఉన్న కారణాంకము “1” అయితే ఆ కరణిని “శుద్ధకరణి” అని అంటారు.

ఉదా : $\sqrt{15}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt[3]{11}$ లు శుద్ధ కరణులు.

(లేదా)

ఒకటి అకరణీయ కారణాంకముగాను, రెండవది కరణిగాను ఉండే కరణిని శుద్ధకరణి అంటారు.

ఉదా : $\sqrt{8}$, $\sqrt{3}$,......................

రాడికల్స్ (కరణుల) న్యాయాలు (Law of Radicals (Surds)) :

(i) n ఒక ధన పూర్ణసంఖ్య; a ఒక అకరణీయ సంఖ్య అయితే $\sqrt[n]{a}$ అనేది a కు n వ ధనమూలము.

(ii) $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{b}$ లు రెండు రాడికల్స్ (కరణులు) అయితే $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

(iii) $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{b}$ లు సమాన పరిమాణం గల రాడికల్స్ అయితే $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

(iv) a అకరణీయ సంఖ్య; మరియు m, n లు ధన పూర్ణసంఖ్యలైతే

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$$

(v) m, n, p లు ధనపూర్ణ సంఖ్యలు; a ధన అకరణీయ సంఖ్య అయితే

$$\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{\left(a^p\right)^m}} = \sqrt[mn]{a^{pm}}$$

(vi) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

* కరణులను పోల్చేందుకు అవి ఒకే పరిమాణానికి చెంది ఉండాలి. వేర్వేరు పరిమాణాల కరణులను పోల్చేందుకు ముందు వాటిని సమాన ఘాత పరిమాణాల కరణులుగా వ్రాయాలి.

* $a\sqrt{c} + b\sqrt{c} = (a+b)\sqrt{c}$

* రెండు కరణుల లబ్ధము ఒక అకరణీయ సంఖ్య అయితే ఆ రెండు కరణులలో ఒక దానిని మరొక దానికి అకరణీయ కారణాంకము అంటారు.

* $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ కి అకరణీయ కారణాంకము $\sqrt{a}-\sqrt{b}$

* $a-\sqrt{b}$ కి అకరణీయ కారణాంకము $a+\sqrt{b}$

సంయుగ్మ కరణులు (Conjugate Surds) : గుర్తు (+, −) లో మాత్రమే భేదము కలిగియుండే ద్విపదకరణి సమాసాలను సంయుగ్మ కరణులు అంటారు.

ఉదా : $\sqrt{x}+\sqrt{y}$; $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ లు ఒక దానికి మరొకటి సంయుగ్మకరణి.

* సంయుగ్మకరణుల మొత్తము; లబ్ధాలు అకరణీయ సంఖ్యలు.

* $a+\sqrt{b} = c+\sqrt{d}$; a, c లు అకరణీయ సంఖ్యలు;

$\sqrt{b}$, $\sqrt{d}$ లు కరణులు అయితే

$a = c$; $b = d$ అగును.

* * *

15. సంవర్గమానాలు
(Logarithms)

సంవర్గమానము (Logarithm) : a ఒక ధన సంఖ్య $(a \neq 1; a > 0)$, N ఒక ధనసంఖ్య; x ఒక వాస్తవ సంఖ్య.

$N = a^x$ అయితే; x ను a ఆధారానికి (భూమికి) సంఖ్య N కు సంవర్గమానము అంటారు. దీనిని సాంకేతికంగా $\log_a N = x$ తో సూచిస్తాము.

(లేదా)

$a^x = N$ అయితే 'a' ఆధారానికి 'N' యొక్క సంవర్గమానము 'x' అంటారు.

* ధనవాస్తవ సంఖ్యలకు మాత్రమే సంవర్గమానాలు నిర్వచింపబడ్డాయి.

* $a^x = N$ అనే సమీకరణాన్ని తృప్తిపరిచే x ఏకైక (ఒకే ఒక) రాశి. కావున $\log_a N$ అనేది ఏకైకం.

* $a^x = N$; $a > 0 (a \neq 1)$ అయితే $x = \log_a N$

* ఒకే సంఖ్య సంవర్గమానాలు వేర్వేరు ఆధారాలకు వేరువేరుగా ఉంటాయి.

  ఉదా : $2^6 = 64$; $\log_2 64 = 6$

  $4^3 = 64$; $\log_4 64 = 3$

* $\log_a 1 = 0 \, (a \neq 0)$

  ఏ శూన్యేతర ఆధారానికైనను, ఒకటికి సంవర్గమానము సున్న.

* ఏ శూన్యేతర ఆధారానికైనను, ఒక సంఖ్య సంవర్గమానము అదే ఆధారానికి 1 అవుతుంది.

  $\log_a a = 1$

* $a > 1; x_1 > x_2$ అయితే $\log_a x_1 > \log_a x_2$

ఈ సందర్భములో ఈ సంవర్గమాన ప్రమేయము ఒక ఆరోహణ ప్రమేయము.

* $0 < a < 1; x_1 > x_2$ అయితే $\log_a x_1 < \log_a x_2$

ఈ సందర్భములో ఈ సంవర్గమాన ప్రమేయము ఒక అవరోహణ ప్రమేయము.

సంవర్గమాన ప్రమేయము (Logarithmic Function) : $a^x = N$; $b^y = M$; $x^y = Z$ సమీకరణం లాంటి వాటిచే నిర్వచింపబడిన ప్రమేయాలను "సంవర్గమాన ప్రమేయాలు" అని అంటారు.

∵ **సంవర్గమాన న్యాయాలు** (Laws of Logarithms) :

(i) $\log_x (ab) = \log_x a + \log_x b$

(ii) $\log_x (abc.....z) = \log_x a + \log_x b + \log_x c + ... + \log_x z$

(iii) $\log_x (\frac{a}{b}) = \log_x a - \log_x b$

(iv) $\log_x a^m = m \log_x a$

* $\log a^{m^n} = n. \log a^m$

* $\log_x a = \log_y a . \log_x y$

* $\log_x y = \frac{\log_x a}{\log_y a}$ or $\log_x y = \frac{\log_a y}{\log_a x}$

* $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$

* $\log_x y = \frac{\log y}{\log x}$

* $\log \frac{y^m}{x^n} = \frac{m}{n} \log_x y$

* $\log_b a \times \log_c b \times \log_a c = 1$

* $\log_a N = x$ అయితే $a^x = N$ అగును.

గమనిక : * $\log\left(\frac{ab}{c}\right) = \log a + \log b - \log c$

* $\log\left(\frac{ab}{cd}\right) = \log a + \log b - \log c - \log d$

* $\log\left(a^p b^q\right) = p \log a + q \log b$

* $\log\left(\frac{a^p b^q}{c^r d^s}\right) = p \log a + q \log b - r \log c - s \log d$

లాక్షణికం (Characteristic) : ఒక సంఖ్య సంవర్గమానములోని పూర్ణాంక భాగాన్ని "లాక్షణికం" అని అంటారు.

మాంటిసా (Mantissa) : ఒక సంఖ్య సంవర్గమానంలోని దశాంశ భాగాన్ని "మాంటిసా" అని అంటారు.

ఉదా : $\log_{10} 16 = 1.2040$ ఇందు లాక్షణికం = 1; మాంటిసా = .2040 .

$\log_{10} 2 = 0.3010$. ఇందు లాక్షణికం = 0; మాంటిసా = .2040.

* $\log_{10} 0.01 = -2 = \bar{2}$; లాక్షణికం $= \bar{2}$

* ఒక సంఖ్యలో 'n' అంకెలుంటే ఆ సంఖ్య సంవర్గమాన లాక్షణికం = n-1

* ఒక సంవర్గమానం లాక్షణికం 'n' అయితే ఆ సంఖ్యలో (n+1) అంకెలు ఉంటాయి.

* దశాంశభిన్నంలో, దశాంశ బిందువు తరువాత 'n' సున్నాలు ఉండి, ఆ తరువాత సార్థకాంకాలు వస్తే ఆ సంవర్గమాన లాక్షణికం $\overline{n+1}$

* మాంటిసాను సంవర్గమాన పట్టికల నుండి తీసుకోవాలి.

గమనిక :

(i) లాక్షణికం ఎల్లప్పుడు ఒక పూర్ణసంఖ్య. అది ధనరాశి లేక ఋణరాశి లేక 'సున్నా' కావచ్చును.

(ii) మాంటిసా ఎల్లప్పుడు ధనాత్మకమై 1 కంటె తక్కువ ఉండును.

(iii) ఒక సంఖ్యలో పూర్ణాంక భాగం; దశాంశభాగం రెండూ ఉన్న ఆ సంఖ్య సంవర్గమానంలోని లాక్షణికం కనుగోనడానికి, దాని పూర్ణాంకభాగంలోని అంకెల సంఖ్యను మాత్రమే పరిగణలోనికి తీసుకోవాలి.

* * *

16. వ్యాపార గణితము
(Commercial Mathematics)

(I) **నిష్పత్తి; అనుపాతము** (Ratio and Proportion) :

నిష్పత్తి (Ratio) : ఒకే ప్రమాణములు గల రెండు రాశులను భాగాహారము చేసి పోల్చిన వచ్చు సంఖ్యను ఆ రాశుల "నిష్పత్తి" అని అంటారు.

* a, b అను రెండు రాశుల నిష్పత్తిని $\frac{a}{b}$ (లేదా) a:b చే సూచిస్తారు.

* a:b నిష్పత్తిలో a, b లను నిష్పత్తి పదములు అంటారు. మొదటి పదము 'a' ను "పూర్వపదము" అని రెండవ పదము 'b' ను "పరపదము" అని అంటారు.

గమనిక :

* నిష్పత్తి పూర్వ; పర పదాలను సున్నా కాని ఒకే సంఖ్యచే గుణించినా; భాగించినా నిష్పత్తి విలువ మారదు.
* నిష్పత్తి పదాలను ఎప్పుడు పూర్ణాంకములుగానే సూచించాలి.
* నిష్పత్తి పూర్వ, పర పదాలలో ఏదో ఒకటి గాని లేక రెండూగాని భిన్నాలు అయితే,

  భిన్నాల హారముల క.సా.గు. కనుగొని, ఆ క.సా.గు. చే పూర్వ, పర పదాలను గుణిస్తే నిష్పత్తి పదాలు పూర్ణాంకాలుగా మారుతాయి.
* నిష్పత్తి పదాలు పరస్పర ప్రధాన సంఖ్యలైతే అనగా పూర్వ, పర పదాలకు ఒకటి తప్ప ఏ ఇతర ఉమ్మడి కారణాంకము లేకుంటే ఆ నిష్పత్తి కనిష్ఠ పదాలలో ఉందని (లేక) సూక్ష్మరూపంలో ఉందని అంటారు.
* ఒక నిష్పత్తిని సూక్ష్మరూపంలో రాయడానికి నిష్పత్తి పదాల గ.సా.భా.ను కనుగొని, పదాలను ఈ గ.సా.భా. చే భాగించాలి.
* ఒకే ప్రమాణంలో గల రెండు సదృశరాసుల నిష్పత్తి కేవలం ఒక సంఖ్య మాత్రమే. ఈ సంఖ్యకు ప్రమాణాలు ఉండవు. నిష్పత్తి విలువ సదృశ రాశులను తెలుపు ప్రమాణంపై ఆధారపడి ఉండదు.
* రెండు నిష్పత్తులు సమానమైతే ఆ రెండు నిష్పత్తులలో గల నాలుగు రాశులు క్రమంగా "అనుపాతము" లో ఉన్నాయి అంటాం.

  అనగా a:b = c:d అయితే a, b, c, d లు అనుపాతములో ఉన్నాయి అంటాము.

గమనిక : a:b = c:d అనే అనుపాతాన్ని $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ అని (లేక) a:b::c:d చే సూచిస్తారు.

గమనిక : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ అయితే a, b, c, d లను వరుసగా అనుపాతము యొక్క మొదటి; రెండవ; మూడవ; నాల్గవ పదాలు అంటారు.

అనుపాతము యొక్క మొదటి; నాల్గవ పదాలైన 'a' మరియు 'd' లను "అంత్యము" లని, రెండవ, మూడవ పదాలైన b, c లను "మధ్యములు" అని అంటారు.

* నాలుగు సంఖ్యలు అనుపాతంలో ఉంటే,

  అంత్యముల లబ్ధము = మధ్యముల లబ్ధము అగును.

  అనగా a:b = c:d అయితే ad = bc అగును.

* నాలుగు సంఖ్యలు అనుపాతములో లేకపోతే

  అంత్యముల లబ్ధము $\neq$ మధ్యముల లబ్ధము అగును.

* a, b; b, c లు అనుపాతములో ఉంటే a, b, c లు అనుపాతంలో ఉన్నాయని అంటాము.

గమనిక : a:b = b:c అయితే a, b, c లు అనుపాతంలో ఉన్నాయని అందురు.

* a, b, c లు అనుపాతంలో ఉంటే 'b' ను a, c ల యొక్క "అనుపాత మధ్యమము" అంటారు.

* a, b, c లు అనుపాతములో ఉంటే $b^2 = ac$ అగును.

* a, b, c, d లు అనుపాతములో ఉంటే d ను a, b, c ల అనుపాత మధ్యమము అంటారు.

మిశ్రమానుపాతము (Proportion) **:** కొన్ని సందర్భాలలో ఒక రాశిలోని మార్పు రెండు లేక అంతకంటె ఎక్కువ రాశులలోని మార్పులతో ఏదో ఒక అనుపాతంలో ఉంటుంది.

1) ఆ రాశి మిగిలిన రాశులన్నింటితో అనులోమానుపాతంలో ఉండవచ్చును. అప్పుడు ఆ రాశిలోని మార్పును చూపించే నిష్పత్తి = మిగిలిన రాశులలోని మార్పులను సూచించే నిష్పత్తులకు బహుళ నిష్పత్తి.

2) ఆ రాశి మిగిలిన రాశులలో కొన్నింటితో అనులోమానుపాతంలోను, కొన్నింటితో విలోమానుపాతంలోనూ ఉండవచ్చు. అప్పుడు ఆ రాశిలోని మార్పును చూపే నిష్పత్తి = అనులోమానుపాతంలో గల రాశుల నిష్పత్తికి, విలోమానుపాతంలోగల రాశుల విలోమనిష్పత్తికి గల బహుళ నిష్పత్తి.

3) ఆ రాశి మిగిలిన రాశులన్నింటితో విలోమానుపాతంలో ఉంటే ఆ రాశిలో మార్పును సూచించే నిష్పత్తి = మిగిలిన రాశులలో మార్పులను తెలియజేసే నిష్పత్తులకు విలోమ నిష్పత్తుల బహుళ నిష్పత్తి.

అనులోమ చరత్వము (Direct Proportion) : x, y అనే రెండు చరరాశులు వాటి మధ్య నిష్పత్తి $\frac{x}{y}$ ఎప్పుడు ఒక స్థిరాంకము K అయ్యేట్లు చరిస్తే అవి "అనులోమ చరత్వము" కలిగి ఉన్నాయని అంటాము.

"K" ను చరత్వ స్థిరాంకము అంటారు.

గమనిక : x, y లు అనులోమ చరత్వము కలిగి ఉంటే,

$\frac{x}{y} = K$ (లేక) $x = ky$ అగును.

దీనిని $x \alpha y$ తో సూచిస్తాము.

గమనిక : $\frac{x}{y} = K$ అయినప్పుడు 'x' చరరాశి విలువ పెరిగితే (తగ్గితే) నిష్పత్తి విలువ స్థిరముగా ఉండటానికి 'y' చరరాశి విలువ కూడా అనురూపంగా పెరగటం (తగ్గటం) జరగాలి.

విలోమ చరత్వము (Inverse Proportion) : x, y అనే చరరాశులు $x.y = K$ (స్థిరాంకము) అగునట్లు చరిస్తే అవి ఒక దానితో మరొకటి "విలోమ చరత్వము" కలిగి ఉన్నది అంటాము.

గమనిక : $x \times y = K$ అనే సంబంధములో

"ఒక చరరాశి విలువ పెరిగిన (తగ్గిన) లబ్ధము స్థిరముగా ఉంచుటకు రెండవ చరరాశి యొక్క విలువ అనురూపముగా తగ్గును (పెరుగును)".

* b:a ను a:b యొక్క విలోమ నిష్పత్తి అందురు.

* $x \times y = K$ సమీకరణాన్ని $\frac{x}{\left(\frac{1}{y}\right)} = K$ (లేదా) $\frac{y}{\left(\frac{1}{x}\right)} = K$ గా వ్రాయవచ్చును.

* x, y లు విలోమానుపాతంలో ఉంటే x, $\frac{1}{y}$ మరియు y, $\frac{1}{x}$ లు అనులోమానుపాతంలో ఉంటాయి.

* x, y లు విలోమానుపాతంలో ఉంటే

$x \alpha \frac{1}{y}$ మరియు $y \alpha \frac{1}{x}$ అగును.

* a:b; c:d ల బహుళ నిష్పత్తి ac: bd

* రెండు నిష్పత్తుల సమానత్వమును అనుపాతము అంటారు.

స్కేలు (Scale) : ప్రదేశపు నిజ కొలతలకు, ప్లానులోని అనురూప కొలతలకు మధ్యగల సంబంధాన్ని "స్కేలు" అంటారు.

సూచిక నిష్పత్తి (Representative Ratio) : ప్లానులో రెండు ప్రదేశాల మధ్య దూరము మరియు ఆ ప్రదేశాల మధ్య నిజదూరాల నిష్పత్తిని "సూచిక నిష్పత్తి" అని అంటారు.
అనగా సూచిక నిష్పత్తి = ప్లానులో దూరము : అనురూప నిజదూరము

సూచిక భిన్నము (Representative Fraction) : సూచిక నిష్పత్తిని భిన్నరూపములో సూచిస్తే దానిని "సూచిక భిన్నము" అంటారు.

అనగా సూచిక భిన్నము = $\frac{\textbf{ప్లానులో దూరము}}{\textbf{అనురూప నిజదూరము}}$

గమనిక : సూచిక భిన్నములో లవము ఎప్పుడు ఒకటి (1) గా ఉండవలెను.

ఉదా : 1 సెం.మీ. = 2 కి.మీ అయితే
సూచిక నిష్పత్తి = 1:2,00,000

సూచిక భిన్నము = $\frac{1}{2,00,000}$ (2 కి.మీ $= 2 \times 1000$ మీ.
$= 2 \times 1000 \times 100$ సెం.మీ.)

(II) **శాతములు** (Percentages) :

శాతములు (Percentages) : 100 హారముగా గల భిన్నాలను "శాతములు" అని అంటారు.

గమనిక :

సామాన్య భిన్నాన్ని శాతముగా మార్చుటకు భిన్నాన్ని 100 తో గుణించి, సూక్ష్మీకరించి, శాతము యొక్క సంకేతము % ఫలితానికి ఉంచవలెను.

* శాతాన్ని సామాన్య భిన్నంగా మార్చడానికి శాత సంకేతము % ను తీసివేసి $\frac{1}{100}$ తో గుణించి సూక్ష్మీకరించవలెను.

* శాతము అనగా నూటికి అని అర్ధము.
* ఒక రాశిలో పెరుగుదల 'x' శాతము అయితే, ఆ రాశి పెరిగిన విలువను కనుక్కోడానికి దానిని $\frac{(100+x)}{100}$ తో గుణించవలెను.
* ఒక రాశిలో తగ్గుదల "x%" ఉంటే ఆ రాశి తగ్గిన విలువను కనుగొనుటకు ఆ రాశిని $\frac{(100-x)}{100}$ తో గుణించవలెను.

(III) **లాభనష్టములు** (Profit And Loss) :

కొన్నవెల (Cost Price) : ఒక వ్యాపారి తాను వస్తువులు కొనడానికి పెట్టిన ఖర్చును "కొన్నవెల" (కొ.వె.) అంటాము.

అమ్మినవెల (Selling Price) : వ్యాపారి వస్తువులను అమ్ము వెలను "అమ్మిన వెల" (అ.వె.) అంటాము.

లాభము (Profit) : కొన్నవెల కంటె అమ్మినవెల ఎక్కువగా ఉంటే వ్యాపారికి "లాభము" వస్తుంది.

* లాభము = అమ్మినవెల - కొన్నవెల
* అమ్మిన వెల = కొన్నవెల + లాభము
* కొన్నవెల = అమ్మినవెల - లాభము

నష్టము (Loss) : కొన్నవెల కంటె అమ్మిన వెల తక్కువగా ఉంటే వ్యాపారికి నష్టము వస్తుంది.

* నష్టము = కొన్నవెల - అమ్మినవెల
* కొన్నవెల = నష్టము + అమ్మినవెల
* అమ్మినవెల = కొన్నవెల - నష్టము
* లాభశాతము = $\frac{\text{లాభము}}{\text{కొన్నవెల}} \times 100$
* నష్టశాతము = $\frac{\text{నష్టము}}{\text{కొన్నవెల}} \times 100$

గమనిక : లాభ, నష్టముల శాతములు కొన్నవెలపై నిర్ణయింపబడును.

* ఒక వస్తువు కొన్న ఖరీదు రూ. C; అమ్మిన ఖరీదు రూ. S; లాభశాతము = $g\%$ మరియు నష్టశాతము = $l\%$ అయితే వీని మధ్య సంబంధము.

(i) $S = C\times\frac{(100+g)}{100}$ (లేదా) $C=\frac{100\times S}{100+g}$

(ii) $S = C\times\frac{100-l}{100}$ (లేదా) $C=\frac{100\times S}{100-l}$

* లాభము లేక నష్టము శాతముగా తెల్పితే కొన్నవెలలో శాతమనియే భావించాలి.

లాభశాతము = $\frac{\text{లాభము}}{\text{కొన్నవెల}}\times 100$

అమ్మిన వెల = కొన్నవెల $\times\frac{100+g}{100}$

గమనిక : g లాభశాతము, నష్టము వచ్చినప్పుడు g కు బదులుగా -g వ్రాసుకొనవలెను.

* కొన్నవెల = $\frac{\text{అమ్మిన వెల}\times 100}{100+\text{లాభశాతము (- నష్టశాతము)}}$

(IV) **వర్తక రుసుము** (Marked Price)

ప్రకటన వెల (Catalogue Price) : వస్తువులు తయారు చేసేవారు, వర్తకులు తమకు ఆ వస్తువు గిట్టిన వెలపై కొంత లాభం వేసుకొని "ప్రకటన వెల" నిర్ణయిస్తారు. దీనినే "పట్టీవెల", "క్యాటలాగు వెల" (లేదా) "లిఖిత మూల్యం" (లేదా) "గుర్తించిన వెల" అని అంటారు.

రుసుము (లేదా) డిస్కౌంట్ (Discount) : కొనే వారిని ఆకర్షించేందుకు ఆ ప్రకటన వెలపై కొంత తగ్గించి అమ్ముదురు. ఈ తగ్గింపునే రుసుము (లేదా) వర్తక రుసుము (లేదా) ముదరా (లేదా) డిస్కౌంట్ అని అంటారు.

* రుసుమును ఎల్లప్పుడు ప్రకటన వెలపై లెక్కిస్తారు.
* అమ్మిన వెల = ప్రకటన వెల – రుసుము (డిస్కౌంట్)
* ప్రకటన వెల రూ.M, రుసుము శాతము d% అయిన రుసుము = $\frac{Md}{100}$
* అమ్మకము వెల = ప్రకటన వెల – రుసుము

$$=M-\frac{Md}{100}$$

$$=M\left(1-\frac{d}{100}\right)=\frac{M(100-d)}{100}$$

(ఇచ్చట d = రుసుము శాతము)

(V) **వడ్డీ** (Interest) :

అసలు (Principle (P)) : ఒక వ్యక్తి తన అవసరానికై అప్పు తీసుకున్న సొమ్ము (లేక) ఇతరులకు అప్పు ఇచ్చిన సొమ్మును "అసలు" అందురు.

వడ్డీ (Interest (I)) : అప్పు తీసుకొన్న సొమ్ముకాక అప్పు ఇచ్చిన వ్యక్తికి అధనంగా చెల్లించే సొమ్మును "వడ్డీ" అంటారు.

మొత్తము (Amount) : నిర్ణీత కాలము తరువాత అప్పు ఇచ్చిన వానికి చెల్లించు మొత్తం సొమ్మును "మొత్తము" అని అంటారు.

* మొత్తము = అసలు + వడ్డి.

వడ్డీ రేటు (Rate of Interest (R)) : అప్పు ఇచ్చువానికి, తీసుకొను వానికి మధ్య చెల్లించవలసిన వడ్డీపై కుదిరిన ఒప్పందమును "వడ్డీరేటు" అంటారు.

* వడ్డీరేటును ఒక యూనిట్ డబ్బుకు మరియు ఒక యూనిట్ కాలమునకు నిర్ణయిస్తారు.

రేటు శాతము (Rate of Percentage) : సంవత్సరానికి, నూటికి నిర్ణయించే వడ్డిని "రేటు శాతము" అంటారు.

గమనిక : వడ్డీ విలువ అసలు, వడ్డీరేటు మరియు కాలములకు అనులోమానుపాతంలో ఉండును.

వడ్డీ రకములు (Types of Interests) : వడ్డీ రెండు రకాలు.

(i) **బారువడ్డీ**; (ii) **చక్రవడ్డీ**

బారువడ్డీ (Simple Interest) : వడ్డీ కాలమంతా అసలు మీద మాత్రమే వడ్డీ కడితే ఆ వడ్డీని "బారువడ్డీ" అని అంటారు.

* బారువడ్డీ యందు బాకీ తీర్చేవరకు అసలు స్థిరముగా ఉండును.

* అసలు 'P'; వడ్డీరేటు 'R'; కాలము 'T' సంవత్సరం అయితే బారువడ్డీ

$$I = \frac{PTR}{100}$$

(i) $P = \frac{100 \times I}{TR}$

(ii) $R = \frac{100 \times I}{PT}$

(iii) $T = \frac{100 \times I}{PR}$

* మొత్తము (A) = అసలు (P) + వడ్డీ (I)

i.e., $A = P + I$

చక్రవడ్డీ (Compound Interest) : వడ్డీని అసలుకు కలిపి ఆ మొత్తానికి తరువాత సంవత్సరమునకు అసలుగా తీసుకొంటారు. తరువాత సంవత్సరాల్లో అసలు, వడ్డీ పెరుగుతుంటాయి. ఈ విధానాన్ని "చక్రవడ్డీ" పద్ధతి అంటారు.

* చక్రవడ్డీ పద్ధతి ప్రకారం మొత్తమునకు సూత్రము

$$A = P\left(1 + \frac{R}{100}\right)^n$$

ఇచ్చట A = మొత్తము; P = అసలు; R = ఒక పర్యాయం వడ్డీ కట్టుటకు అయ్యే వడ్డీరేటు.

n = వడ్డీ లెక్క కట్టవలసిన పర్యాయముల సంఖ్య.

గమనిక : 1 సంవత్సరములోపు అయితే $A = P\left(1 + \frac{TR}{100}\right)$

ఇచ్చట T కాలము సంవత్సరములలో

* చక్రవడ్డీ = A-P = $P\left(1 + \frac{R}{100}\right)^n - P$ అగును.

(VI) **భాగస్వామ్యం** (Partner Ship) :

భాగస్వాములు (లేదా) పెట్టుబడిదారులు (Partners) : ఒక వ్యాపారాన్ని ఇద్దరి కంటే ఎక్కువ మంది వ్యక్తులు కలిసి నడిపితే, పెట్టుబడి పెట్టు వ్యక్తులను "భాగస్వాములు" (లేదా) "పెట్టుబడిదారులు" అని అంటారు.

మూలధనము (లేక) పెట్టుబడి (Investment (or) Capital) : వ్యాపారము కొరకై భాగస్వాములు పెట్టిన పెట్టుబడి ధనమును "మూల ధనము" లేక "పెట్టుబడి" (Capital) అని అంటారు.

ఉమ్మడి వ్యాపారము (Partnetship Business) : ఒకరి కంటే ఎక్కువ వ్యక్తులు కలిసి చేయు వ్యాపారమును "ఉమ్మడి వ్యాపారము" అంటారు. దీనినే "భాగస్వామ్యం" అని కూడా అంటారు.

భాగస్వామ్యం రకాలు (Types of Partnerships) : భాగస్వామ్యం రెండు రకములు

(i) **సామాన్య భాగస్వామ్యం** (General Partnership)

(ii) సంయుక్త భాగస్వామ్యం (Compound Partnership)

* సామాన్య భాగస్వామ్యం యందు పెట్టుబడులు సమాన కాలములకు వ్యాపారము యందు ఉంటాయి.

ఇందులో పొందు లాభముగాని; నష్టమును గాని భాగస్వాములు పెట్టుబడుల నిష్పత్తిలో పంచుకుంటారు.

* సంయుక్త భాగస్వామ్యంలో వేరువేరు పెట్టుబడులు, వేరువేరు కాలములకు వ్యాపారమందుంటాయి.

ఒక్కొక్కని పెట్టుబడి, వాని కాలముల పరిమితి, లబ్ధముల నిష్పత్తిలో లాభమును గాని, నష్టమునుగాని పంచుకుంటాయి.

(VII) **కాలము - పని** (Time - Work) :

* A అనువాడు ఒక పనిని 20 రోజులలో చేస్తే. ఒక రోజులో ఆ పనియందు 20 వ వంతు $\left(\frac{1}{20}\right)$ చేయగలడు (సగటున)

* B ఒక పనిలో $\frac{1}{4}$ వ భాగము ఒక రోజులో చేస్తే; ఆ పని చేయడానికి B కి 4 రోజులు పట్టును.

గమనిక : ఒక మనిషి పని చేయగల శక్తి అతడొక పనిని చేయుటకు పట్టుకాలము విలోమానుపాతంలో ఉంటాయి.

(VIII) **కాలము - దూరము** (Time - Distance) :

* వేగము తగ్గితే కాలము పెరుగును.

* వేగము పెరిగితే కాలము తగ్గును.

* ప్రయాణ దూరము (d); వేగము (s); కాలము (t) ల మధ్య సంబంధము

దూరము = వేగము × కాలము

$d = st$

మరియు $t = \frac{d}{s}$; $s = \frac{d}{t}$

(IX) **సాపేక్ష వేగము** (Relative Speed) :

* ఎదురెదురుగా (వ్యతిరేక దిశలో) ప్రయాణము చేయునప్పుడు
  సాపేక్ష వేగము = వారి వేగముల మొత్తము
* ఒకే దిక్కులో ఇద్దరు ప్రయాణము చేయునప్పుడు,
  సాపేక్ష వేగము = వేగముల భేదము
* ఎదురెదురుగా (లేక) ఒకే దిక్కున ప్రయాణించినప్పుడు వారు
  కలుసుకొనుటకు పట్టు కాలము = $\frac{\text{మధ్య దూరము}}{\text{సాపేక్ష వేగము}}$

(X) **గడియారములు** (Clocks) :

* గడియారము యొక్క ముఖ పరిధి 12 భాగములుగా విభజింపబడి ఉండును. ప్రతీ ఒక్క భాగము మరల 5 భాగములు చేయబడి ఉండును.
* గడియారములో పెద్దముల్లు నిముషములను; చిన్నముల్లు గంటలను సూచించును.
* నిమిషముల ముల్లు పూర్తిగా ఒక చుట్టు తిరుగుటకు 1 గంట కాలము పట్టును.
* 60 నిమిషముల కాలములో పెద్దముల్లు 360^0 తిరుగును.
* పెద్దముల్లు నిమిషములో $\frac{360^0}{60} = 6^0$ తిరుగును.
* చిన్నముల్లు పూర్తిగా ఒక చుట్టు తిరుగుటకు 12 గంటలు పట్టును.
* చిన్నముల్లు 1 నిమిషములో $\frac{30^0}{60} = \frac{1^0}{2}$ తిరుగును.
* పెద్దముల్లు; చిన్నముల్లుల వేగముల నిష్పత్తి $= 6 : \frac{1}{2}$
  $= 12 : 1$
* ప్రతీ నిమిషమునకు పెద్దముల్లు చిన్నముల్లు కంటే $6^0 - \frac{1^0}{2} = 5\frac{1^0}{2}$ ఎక్కువగా తిరుగును.

  కావున నిమిషమునకు వాటి సాపేక్ష వేగము $= 5\frac{1^0}{2}$
* కాలము = $\frac{\text{మధ్య దూరము}}{\text{సాపేక్ష వేగము}}$

* * *

17. క్షేత్రమితి
(Mensuration)

క్షేత్రమితి (Mensuration) : క్షేత్రగణితము, రేఖాగణితము పటాల కొలతలకు సంబంధించిన శాస్త్రము. పొడవులు, వైశాల్యాలు, ఘనపరిమాణాలను గూర్చి ఇది తెలుపుతుంది.

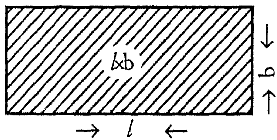
వైశాల్యము (Area) : ఒక పటము సరిహద్దుతో (లేదా చుట్టుచేత) ఆవరింపబడిన ప్రదేశము కొలతను ఆ సరళ సంవృత పటము యొక్క "వైశాల్యము" అని అంటారు.

* వైశాల్యమును చదరపు ప్రమాణాలలో (చ.సెం.మీ., చ.మీ.,.....) లలో కొలుస్తాము.

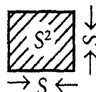
* ఒక మీటరు పొడవు గల భుజం గల చతురస్ర వైశాల్యము ఒక చదరపు మీటరు.

* ఒక సెం.మీ. భుజము గల చతురస్ర వైశాల్యము ఒక చదరపు సెం.మీ.

* ఒక దీర్ఘ చతురస్రం పొడవు 'l' దాని వెడల్పు 'b' ప్రక్క భుజాల పొడవులుగా సూచిస్తే దాని వైశాల్యము $A = l \times b = l\,b$ అగును.



* 'S' భుజము పొడవు గల చతురస్ర వైశాల్యము $A = S^2$



* ఒక గది పొడవు, వెడల్పు, ఎత్తులు వరుసగా l, b, h అయితే

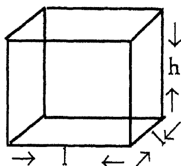
  (i) దాని నాలుగు గోడల వైశాల్యము $A = 2h(l+b)$ అగును.

  (ii) గదినేల చుట్టుకొలత $= 2l + 2b = 2(l+b)$

∴ వైశాల్యము = నేల చుట్టుకొలత × గది ఎత్తు.

* గదినేల చుట్టుకొలత 'p'; గది ఎత్తు 'h' మరియు గది నాలుగు గోడల వైశాల్యము A అయితే $A = ph$

* గదినేల చతురస్రాకారంగా ఉంటే గది నాలుగు గోడలవైశాల్యము $A = 4lh$.

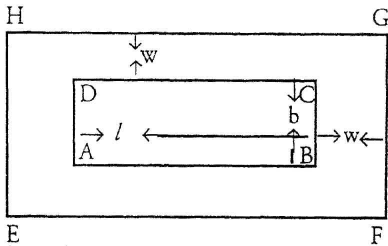


* ABCD దీర్ఘ చతురస్రములో

పొడవు = l

వెడల్పు = b

ABCD ప్లాటు చుట్టు



బయట ఒక బాట వుంది. దాని వెడల్పు అన్నిచోట్ల 'w' అయితే

(i) లోపలి దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యము = lb

(ii) బయటి దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యము = $(l+2w).(b+2w)$

(iii) బాట వైశాల్యము = $(l+2w)(b+2w)-lb$(లేదా)

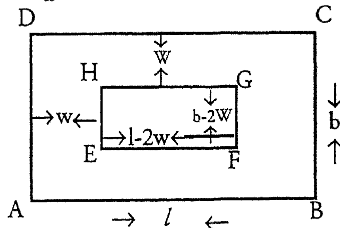
$$= 2w(l+b)+4w^2$$

$$= 2w(l+b+2w)$$

అనగా బాట వైశాల్యం = బయటి దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యం – లోపలి దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యము.

* ABCD ఒక దీర్ఘ చతురస్ర ప్లాటు. దాని పొడవు 'l' వెడల్పు 'b' ABCD దీర్ఘ చతురస్ర ప్లాటు లోపల చుట్టు 'w' వెడల్పు గల ఒక బాట వుంటే

(i) దీర్ఘ చతురస్రం (ABCD) లోపలి కొలతలు l-2w; b-2w అవుతాయి.



(ii) దీర్ఘ చతురస్రం (ABCD) వైశాల్యం = $l \times b$

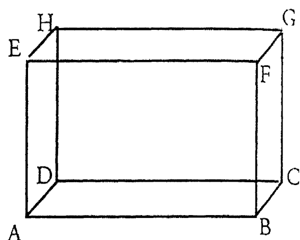
(iii) లోపలి దీర్ఘ చతురస్రం (EFGH)

వైశాల్యం = $(l-2w)\times(b-2w)$

(iv) బాట వైశాల్యం = $lb-(l-2w)(b-2w)$ (or)

$$= 2w(l+b-2w)$$

**** దీర్ఘఘనము** (Cuboid) :



ఉదా : అగ్గిపెట్టె; ఇటుక,.....

* దీర్ఘ ఘనానికి ఆరు ముఖాలు ఉంటాయి.

* దీర్ఘ ఘనము యొక్క ముఖాలు అన్నియు దీర్ఘ చతురస్రాకారంలో ఉంటాయి.

* దీర్ఘ ఘనంలోని ఆరు ముఖాలలో మూడు జతల ముఖాలు ఎదురెదురుగా ఉంటాయి.

దీర్ఘఘనం అంచు (Edge of a Cuboid) : దీర్ఘ ఘనంలోని రెండు ప్రక్క ముఖాలు ఒక రేఖా ఖండంతో కలుస్తాయి. దీనిని "దీర్ఘ ఘనం అంచు" అంటారు.

* దీర్ఘ ఘనానికి 12 అంచులు ఉంటాయి.

* దీర్ఘ ఘనానికి 8 మూలాలు (లేదా) శీర్షాలు ఉంటాయి.

* దీర్ఘ ఘన అంచుల వివిధ పొడవులు మూడు మాత్రమే.

  వీటినే పొడవు; వెడల్పు; ఎత్తు అంటారు.

* దీర్ఘ ఘనానికి నాలుగు పక్క ముఖాలు ఉంటాయి. ఈ నాలుగు ముఖాల మొత్తము వైశాల్యమును దీర్ఘ ఘనం "ప్రక్కతల వైశాల్యము" (లేదా) "పార్శ్వతల వైశాల్యము" అని అంటారు.

* దీర్ఘ ఘనం ఆరు ముఖాల మొత్తము వైశాల్యాన్ని దీర్ఘఘనం "సంపూర్ణతల వైశాల్యము" అంటారు.

* దీర్ఘఘనం పొడవు; వెడల్పు; ఎత్తులు వరుసగా l, b. h అయితే దాని

  (i) ప్రక్కతల వైశాల్యము $= 2h(l+b)$

  (ii) సంపూర్ణతల వైశాల్యము $= 2(lb+bh+hl)$

  (iii) దీర్ఘఘన ఘనపరిమాణము $V = lbh$

  అనగా దీర్ఘఘన ఘనపరిమాణము = (భూవైశాల్యం) ఎత్తు.

  (iv) దీర్ఘఘనం ఎత్తు (h) $= \frac{V}{lb} = \frac{\text{దీర్ఘఘన ఘనపరిమాణం}}{\text{దీర్ఘఘన భూవైశాల్యం}}$

* ఒక లోహపు పెట్టె బయటి కొలతలు వరుసగా l, b, h; లోహపు మందము 't' అయితే.

దాని లోపలి కొలతలు l-2t; b-2t; h-2t అవుతాయి.

ఘనము (Cube) : ఒక దీర్ఘఘనంలో పొడవు, వెడల్పు, ఎత్తు సమానమైతే దానిని "ఘనము" అంటారు. (లేదా)

ఒక శీర్షం వద్ద కలుసుకునే సమాన అంచులు గల దీర్ఘ ఘనమును "ఘనము" అంటారు.

ఉదా : పాచిక; రూబిక్ ఘనం;......

* ఒక ఘనం యొక్క అంచు (భుజము) 'l' అయితే

(i) ప్రతి ముఖం యొక్క వైశాల్యము $= l^2$

(ii) ఘనం ప్రక్కతల వైశాల్యము $= 4l^2$

(iii) ఘనం సంపూర్ణతల వైశాల్యము $= 6l^2$

(iv) ఘనం ఘనపరిమాణము (V) $= l^3$

(v) దీర్ఘఘనం భూవైశాల్యం $= lb$ చ॥ యూ॥

(vi) దీర్ఘఘనం అంచుల పొడవుల మొత్తం = 4(l+b+h) ప్రమాణాలు

(vii) దీర్ఘఘనం కర్ణము $= \sqrt{l^2+b^2+h^2}$ ప్రమాణాలు

** **పట్టకము** (Prism) :

పట్టకము (Prism) : రెండు సర్వసమాన చివరలు కల బహుముఖిని "పట్టకము" అంటారు. అంచులు సమాంతరాలు. (అంటే అనురూప శీర్షాలను కలుపు రేఖలు సమాంతరాలు).

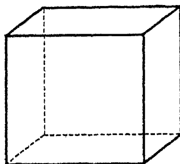
ఉదా : చెక్కని పెన్సిల్; రూలర్, ఘనము; దీర్ఘ ఘనము,.....

క్రమపట్టకము (Right Prism) : భూమి, పై భాగాలు సమాంతరతలాలై సమాన కొలతలు గల పట్టకాన్ని "క్రమపట్టకము" అంటారు.

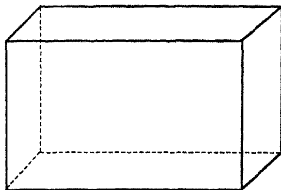
* క్రమపట్టకము ప్రక్కభాగాలను ప్రక్కతలాలు అంటారు. ఇవి సామాన్యంగా దీర్ఘచతురస్రాలు.

త్రిభుజాకార పట్టకము (Triangular Prism) : క్రమపట్టకము భూమి త్రిభుజాకారంగా ఉంటే ఆ పట్టకాన్ని "త్రిభుజాకార పట్టకం" అంటారు.

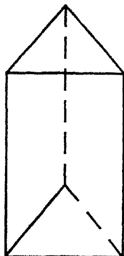
ఉదా :



(ఘనపట్టకం)

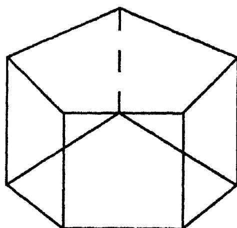


(దీర్ఘఘన పట్టకం)



(త్రిభుజాకార పట్టకం)

పంచభుజి పట్టకము (Pentagonal Prism) : క్రమపట్టకము భూమి పంచభుజి ఆకారంగా ఉంటే దానిని "పంచభుజి పట్టకము" అంటారు.



* క్రమ పట్టకం పేరు దాని భూమి ఆకారాన్ని బట్టి వస్తుంది.

* (i) క్రమపట్టకం ప్రక్క తలాల సంఖ్య = పట్టకం భూమి భుజాల సంఖ్య

(ii) క్రమపట్టకం మొత్తం తలాల సంఖ్య (ముఖతలాల సంఖ్య)

= ప్రక్క తలాల సంఖ్య + భూమి + కప్పు

= పట్టకం భుజాల సంఖ్య + 2

(iii) క్రమ పట్టకం అంచుల సంఖ్య = పట్టక భూమి భుజాల సంఖ్య ×3

(iv) క్రమ పట్టకం అంచుల పొడవుల మొత్తము =

భుజాలసంఖ్య × ఎత్తు +2 భూమి చుట్టుకొలత (భూ పరిధికి రెట్టింపు)

అనగా భూమి చుట్టుకొలత 's'; భూమి భుజాల సంఖ్య 'n'; అంచుల పొడవు S అనుకొనిన

$$S = n \times h + 2s.$$

(v) క్రమపట్టకం పక్కతల వైశాల్యము = $(a+b+c+d+.......)\times h$ చ.ప్రమాణం

$=p\times h$ (p భూ పరిధి; h పట్టకం ఎత్తు)

* ఒక పట్టక ప్రక్కతల వైశాల్యము 'A'; భూ పరిధి 'p'; ఎత్తు 'h' అయితే

$A = p\times h$ చదరపు యూనిట్లు $\Rightarrow p = \frac{A}{h}$

* క్రమపట్టక సంపూర్ణతల వైశాల్యము = పట్టక ప్రక్కతల వైశాల్యము + భూవైశాల్యము + కప్పు వైశాల్యము.

= ప్రక్కతల వైశాల్యము + 2×భూవైశాల్యము.

* పట్టకం ఘన పరిమాణము = భూవైశాల్యము×ఎత్తు.

త్రిభుజాకార పట్టకము (Triangular Prism) :

(i) త్రిభుజాకార పట్టకం ప్రక్కతల వైశాల్యము = $p\times h$ చ. యూనిట్లు (p - భూ పరిధి, భూమి చుట్టుకొలత)

(ii) త్రిభుజాకార పట్టకం భూవైశాల్యం = త్రిభుజవైశాల్యం

(iii) త్రిభుజాకార పట్టకం సంపూర్ణతల వైశాల్యం

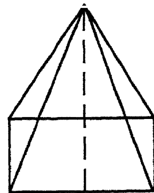
= ph +2×భూవైశాల్యం

= ph +2×త్రిభుజాకార భూవైశాల్యం

పిరమిడ్ (Pyramid) : భూమి ఒక చివర బహుభుజియున్ను, మరియొక చివర శీర్షముగాను, ప్రక్కతలాలు త్రిభుజాలుగానున్న ఘనవస్తువును "పిరమిడ్" అంటారు.

త్రిభుజాలు కలియు బిందువును పిరమిడ్ శీర్షము అని;

శీర్షము నుండి భూమికి గీయబడిన లంబమును "పిరమిడ్ ఎత్తు" అని అంటారు.



క్రమ పిరమిడ్ (Right Pyramid) : భూమి క్రమబహుభుజియై శీర్షము నుండి భూమికి గీయబడిన లంబపాదము బహుభుజ కేంద్రముతో ఏకీభవిస్తే ఆ పిరమిడ్‌ను "క్రమ పిరమిడ్" అని అంటారు.

* శీర్షము నుండి పిరమిడ్ భూమిపైన బహుభుజి భుజాలలో దేనికైనను గీయబడే లంబరేఖా ఖండము పొడవును ఆ పిరమిడ్ "ఏటవాలు ఎత్తు" అని అంటారు.

* పిరమిడ్‌లోని ఒక్కొక్క త్రిభుజాకార ముఖవైశాల్యము

  $= \frac{1}{2}$ (బహుభుజి భుజము)×ఏటవాలు ఎత్తు. చదరపు యూనిట్లు.

* పిరమిడ్ ప్రక్కతల వైశాల్యము $= \frac{1}{2}$×భూపరిధి×ఏటవాలు ఎత్తు చ.యూ

* పిరమిడ్ ఘనపరిమాణము (V) $= \frac{1}{3}$×భూవైశాల్యము×ఎత్తు. ఘ.యూ

* తూము గుండా గంటకు ప్రవహించు నీటి ఘనపరిమాణము

  = తూము ముఖవైశాల్యం × గంటకు ప్రవహించు నీటి వేగము

(i) **మూతగల పెట్టె** (Box with Lid) :

లోపలి పొడవు = బయటి పొడవు – 2 (చెక్క మందం)

లోపలి పొడవు = బయటి వెడల్పు – 2 (చెక్క మందం)

లోపలి ఎత్తు = బయటి ఎత్తు – 2 (చెక్క మందం)

(ii) **మూతలేని పెట్టె** (Box without Lid) :

లోపలి పొడవు = బయటి పొడవు – 2 (చెక్క మందం)

లోపలి వెడల్పు = బయటి వెడల్పు – 2 (చెక్క మందం)

లోపలి ఎత్తు = బయటి ఎత్తు – చెక్క మందం

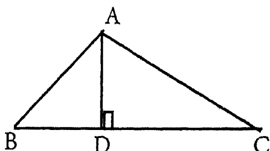
* పెట్టెను చేసేందుకు కావలసిన చెక్క ఘనపరిమాణము

  = బయటి ఘనపరిమాణం – లోపలి ఘనపరిమాణం

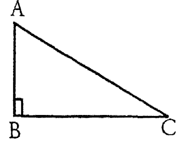
త్రిభుజ వైశాల్యము (Area of Triangle) :

(i) త్రిభుజ వైశాల్యము $= \frac{1}{2}$×భూమి×ఎత్తు

గమనిక : త్రిభుజం అల్పకోణము అయిన; లంబకోణము అయిన; అధిక కోణ త్రిభుజమైనను ఈ సూత్రము సరిపోతుంది.



(ii) లంబకోణ త్రిభుజ వైశాల్యము

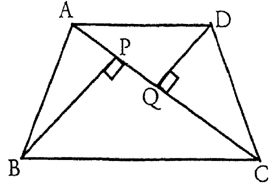


$= \frac{1}{2}$ (లంబకోణం కలిగిన భుజాల లబ్ధం)

ΔABC వైశాల్యం $= \frac{1}{2} BC.AB$

చతుర్భుజ వైశాల్యము (Area of Quadrilataral) :

* ABCD చతుర్భుజంలో, AC కి, BP, DQ అను లంబాలు గీయబడ్డాయి. చతుర్భుజం ABCD వైశాల్యము



$= \frac{1}{2} d(h_1 + h_2)$

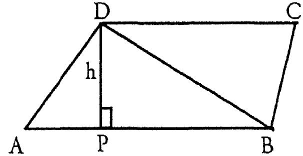
(ఇచ్చుట $AC = d$; $BP = h_1$; $DQ = h_2$)

సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యము (Area of Parallelogram)

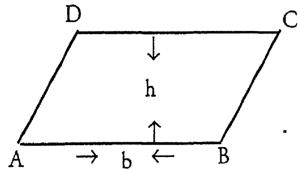
* ABCD సమాంతర చతుర్భుజ

వైశాల్యం $= 2(\Delta ABD$ వైశాల్యం)

$= AB \times DP$

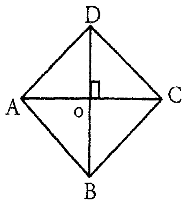


* సమాంతర చతుర్భుజంలోని ఏదేని ఒక భుజమును 'b' సూచించి దానిపై ఎత్తును 'h' సూచిస్తే ఆ సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యము $A = bh$



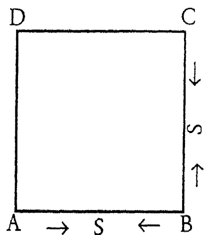
అనగా సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యం = భూమి × సమాంతర భుజాల మధ్య లంబదూరము.

రాంబస్ వైశాల్యము (Area of Rhombus) :



* ఒక రాంబస్ యొక్క కర్ణాలు d_1, d_2 మరియు దాని వైశాల్యము A అయితే $A = \frac{1}{2} d_1 . d_2$
అనగా రాంబస్ వైశాల్యము = $\frac{1}{2} \times$ కర్ణాల లబ్ధము.
* రాంబస్‌లో ఒక కోణము 90^0 అయితే అది చతురస్రం అగును.

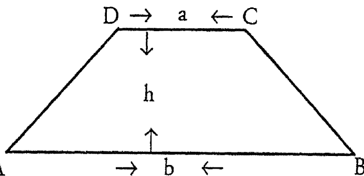
చతురస్ర వైశాల్యము (Area of Square) :



* చతురస్రము యొక్క ప్రతి భుజము పొడవు 'S' మరియు దాని వైశాల్యము 'A' అయితే $A = S^2$
* ఒక చతురస్రం యొక్క కర్ణము 'd' అయితే

దాని వైశాల్యము = $\frac{d^2}{2}$

ట్రెపిజియమ్ (Trapezium) :



ట్రెపిజియమ్ సమాంతర భుజాలు a, b మరియు వాటి మధ్య దూరము h; దాని వైశాల్యము A అయితే

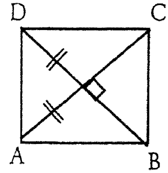
$A = \frac{1}{2}(a+b)h$

అనగా ట్రెపిజియం (సమలంబ చతుర్భుజం) వైశాల్యము

$= \frac{1}{2}$ (సమాంతర భుజాల మొత్తము×వాటి మధ్య దూరము)

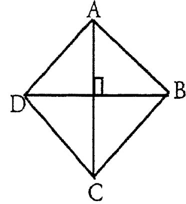
మరియు సమాంతర భుజాల మధ్య దూరము $h = \frac{2A}{a+b}$

గమనిక :



(i) చతురస్రములో కర్ణములు పరస్పరము లంబసమద్విఖండన చేసుకొంటాయి. మరియు సమానములు.

అనగా $AC \perp^r BD$; $AC = BD$



(ii) రాంబస్‌లో కర్ణములు పరస్పరం లంబసమద్విఖండన చేసుకొనును. కాని సమానములు కావు.

అనగా $AC \perp^r BD$; $AC \neq BD$

(iii) దీర్ఘ చతురస్రంలో కర్ణములు సమద్విఖండన చేసుకొంటాయి. మరియు సమానములు.

(iv) సమాంతర చతుర్భుజములో కేవలం కర్ణములు సమద్విఖండన మాత్రమే చేసుకొనును. కాని సమానములు కావు.

(v) ట్రేపిజియమ్‌లో కర్ణములు కేవలం ఖండించుకొంటాయి.

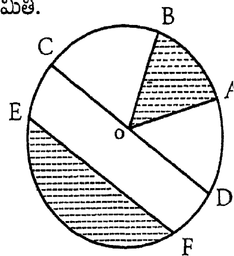
వృత్తము (Circle) : ఒక తలంలోని ఒక స్థిరబిందువు నుండి సమాన దూరంలో గల ఆ తలంలోని బిందువుల సమితిని "వృత్తము" అని అంటారు.

గమనిక : వృత్తము సమతలాన్ని మూడు బిందువుల సమితులుగా విభజిస్తుంది. అవి :

(i) వృత్తం వెలుపల గల బిందువుల సమితి.

(ii) వృత్తం లోపల గల బిందువుల సమితి.

(iii) వృత్తం పైన గల బిందువుల సమితి.



* ప్రక్క పటంలో

→ 0 వృత్త కేంద్రం

→ 0A వృత్త వ్యాసార్థం

→ EF ఒక జ్యా

→ CD ఒక వ్యాసము

C, E ల మధ్యగల వృత్త భాగాన్ని CE చాపం అంటారు.

→ EF జ్యా రేఖ; EF చాపరేఖలచేత ఆవరింపబడిన ప్రదేశాన్ని వృత్తఖండం అంటారు.

→ చాపం AB; రెండు వ్యాసార్థాలు OA, OB లచే ఏర్పడు ప్రాంతాన్ని వృత్త సెక్టారు అని అంటారు.

వృత్త కేంద్రము (Centre of Circle) : స్థిర బిందువును వృత్త కేంద్రం అంటారు.

వృత్త వ్యాసార్థము (Radius of Circle) : వృత్త కేంద్రము నుండి, వృత్తం ఏ బిందువుకైనా గల మధ్య దూరాన్ని ఆ వృత్తం యొక్క వ్యాసార్థం అందురు.

జ్యా (Chord) : వృత్తంపైని ఏ రెండు బిందువులనైనా కలుపు రేఖాఖండాన్ని వృత్త జ్యా అంటారు.

వృత్త వ్యాసము (Diametre of a Circle) : వృత్త కేంద్రము గుండా పోవు ఏ జ్యానైనా "వృత్త వ్యాసము" అంటారు.

గమనిక : వృత్త వ్యాసము వృత్త జ్యాలన్నింటి కంటె పెద్దది.

చాపము (Arc) : వృత్త భాగాన్ని ఆ వృత్త "చాపము" అని అంటారు.

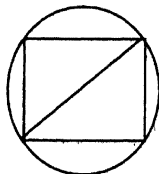
గమనిక :

* జ్యా వృత్త అంతరాన్ని రెండు భాగాలుగా విభజిస్తుంది. ఆ భాగాలను " ఖండాలు" అని అంటారు.

  ప్రతి ఖండము ఒక జ్యా చేతను; ఆ చాపంచేతను ఆవరింపబడి ఉంటుంది.

* ప్రతి వ్యాసము వృత్తాన్ని రెండు సమాన వృత్త ఖండాలుగా విభజిస్తుంది. ఈ భాగాలను "అర్ధ వృత్తాలు" అంటారు.

* ఒక వృత్తంలో ఒక చతురస్రం అంతర్లిఖించబడితే, చతురస్ర కర్ణం వృత్తంను రెండు సమాన అర్ధవృత్తాలుగా విభజిస్తుంది.



వృత్త సెక్టారు (త్రిజ్యాంతరము) (Sector of Circle) :

రెండు వ్యాసార్థాల చేతను, వాటి చివరలచే ఏర్పడిన చాపంచే ఆవరింపబడిన ప్రదేశాన్ని "వృత్త సెక్టారు" అని అంటారు.

* ఒక వృత్త వ్యాసము 'd'; దాని వ్యాసార్థము 'r' అయితే

$$d = 2r \quad (or) \quad r = \frac{d}{2}$$

వృత్త పరిధి (Circumference of a Circle (or) Perimeter of a Circle) : వృత్తం పొడవును వృత్త పరిధి అందురు.

పై (Pie) Π :- $\Pi = \dfrac{\text{వృత్త పరిధి}}{\text{ఆ వృత్త వ్యాసము}}$

* అనగా $\Pi = \frac{c}{d}$; వృత్త పరిధికి; దాని వ్యాసానికి గల నిష్పత్తిని 'Π' అంటారు.

* $C = \Pi.d$ అనగా వృత్త పరిధి $= \Pi \times$ వృత్త వ్యాసము.

* $C = 2\Pi r$ అనగా వృత్త పరిధి $= 2\Pi \times$ వృత్త వ్యాసార్ధము.

* $r = \dfrac{C}{2\Pi}$

Π **విలువ** (Value of Π) : సంఖ్య Π విలువ సుమారు $\frac{22}{7}$

* Π అకరణీయ సంఖ్య కాదు. ఇది ఒక కరణీయ సంఖ్య.

* సంఖ్య $\frac{22}{7}$ అనేది Π కి సవరించిన అకరణీయ సంఖ్య మాత్రమే.

* Π కి మరొక సుమారు అకరణీయ విలువ = 3.1416

* Π కి మరొక సుమారు అకరణీయ విలువ = $\frac{355}{113}$

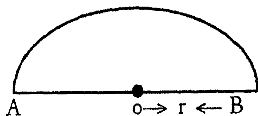
* భాస్కరా చార్యుడు Π విలువ $\frac{3927}{1250}$ అని గణించాడు.

* ఒక అర్ధవృత్తం యొక్క వ్యాసార్ధము 'r' అయితే

దాని చుట్టుకొలత $= 2r + \Pi r$

$= (2+\Pi)r$

$= \frac{36}{7}r = \frac{18}{7}d$



* అర్ధ వృత్తవైశాల్యము $= \dfrac{\pi r^2}{2}$

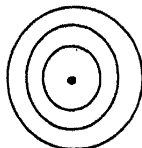
వృత్త వైశాల్యము (Area of Circle) : 'r' వ్యాసార్ధము గల వృత్తము యొక్క వైశాల్యము 'A' అయితే

$A = \pi r^2$ (లేదా) $A = \frac{\pi d^2}{4}$ అగును.

* వృత్త పరిధి = c అయితే ఆ వృత్తం యొక్క వైశాల్యము (A) = $\frac{c^2}{4\pi}$

* వృత్త వైశాల్యము 'A' అయితే దాని పరిధి $C = 2\sqrt{\pi A}$

ఏకకేంద్ర వృత్తాలు (Concentric Circles) : ఒకే కేంద్రము గల వృత్తాలను "ఏకకేంద్ర వృత్తాలు" అని అంటారు.



వృత్తాకార కంకణము (Circular Ring) : రెండు ఏక కేంద్ర వృత్తాల మధ్యగల ప్రాంతాన్ని "వృత్తాకార కంకణం" (లేదా) "కంకణం" (లేదా) "అన్యులస్" (లేదా) "అంగుళ్యాకార స్థలం" అంటారు.

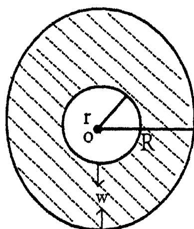
కంకణం నిడివి (లేదా) కంకణం వెడల్పు (Width of the Ring) : రెండు ఏక కేంద్రవృత్తాల వ్యాసార్థాల భేదాన్ని "కంకణం నిడివి" అని అంటారు.

* పెద్ద వృత్త వ్యాసార్థము 'R'; చిన్న వృత్త వ్యాసార్థము 'r' అయిన రెండు వృత్త వ్యాసార్థాల భేదము "కంకణం వెడల్పు" అవుతుంది.

$w = R-r$

* ఒకే కేంద్రము కలిగి ఒకే తలంలో గల బయటి, లోపలి వృత్త వ్యాసార్థాలు వరుసగా R, r మరియు వాటిచే ఏర్పడిన కంకణ వైశాల్యము

A అయితే



$A = \Pi R^2 - \Pi r^2$

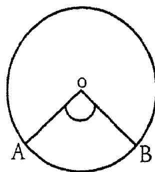
$= \Pi(R^2 - r^2)$

$= \Pi(R+r)(R-r)$

* $A = \Pi(R+r)w$ $\quad (\because w =$ నిడివి $= R-r)$

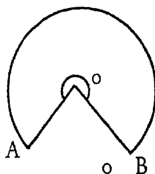
$= \Pi(2r+w)w$

సెక్టారు (లేదా) త్రిజ్యాంతరం (Sector) : ఒక వృత్త చాపంచేతను, ఆ చాప చివరలను కేంద్రంతో కలిపే రెండు వ్యాసార్ధాల చేతను ఆవరింపబడిన ప్రదేశమును "సెక్టారు" అని అంటారు.



గమనిక : పటంలో AB చాపం చేతను; OA, OB వ్యాసార్ధాల చేతను బంధింపబడిన సెక్టారును OAB సెక్టారు అంటారు. $\angle AOB$ ని చాపం 'AB' కేంద్రము 'O' వద్ద ఏర్పరచిన కోణం అంటారు.

గమనిక : వృత్తం నుండి సెక్టారు OAB ని వేరుపరచిన అది కూడా సెక్టారే అవుతుంది.

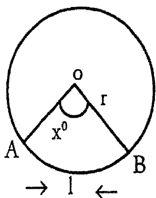


* రెండో సెక్టారు కోణము అధికతర కోణము.

* అర్థ వృత్తము కూడా సెక్టారే.



* 'r' వ్యాసార్ధము గల వృత్త సెక్టారు, దాని చాపము పొడవు 'l' చాపము వృత్త కేంద్రము వద్ద చేయు కోణము x^0 అయితే



(i) సెక్టారు వైశాల్యము $A = \frac{X^0}{360} \times \pi r^2$

$$A = \frac{1}{2} lr$$

$$l = \frac{x}{360} \times 2\pi r$$

(ii) సెక్టారు చుట్టుకొలత $= 2r + l = d + l$

* అర్థవృత్తంలోని సెక్టారు కోణము 180^0

* దీర్ఘ చతురస్రం నందలి పొడవు, వెడల్పునకు సమానం చేసిన అది చతురస్రం అగును.

* రాంబస్‌లో ఒక కోణం 90^0 అయితే అది చతురస్రం.

* ప్రతి కోణము సమానంగా గల సమాంతర చతుర్భుజం ఒక దీర్ఘ చతురస్రం.

* చతురస్రంలో కర్ణము రెండు లంబకోణ సమద్విబాహు త్రిభుజాలుగా విభజిస్తుంది. (దీర్ఘ చతురస్రంలో కాదు)

* చతురస్ర కర్ణాలు ఆ చతురస్రంను నాలుగు లంబకోణ సమద్విబాహు త్రిభుజాలుగా విభజిస్తాయి.

* త్రిభుఒంలోని ఏ రెండు భుజాల మొత్తము అయిన మూడవ భుజము కంటె ఎక్కువ.

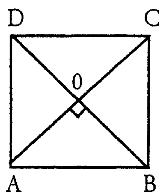
* త్రిభుజములోని ఏ రెండు భుజాల భేదమైన మూడవ భుజము కంటె తక్కువ.

* సమద్విబాహు త్రిభుజములో సమాన భుజాలకు ఎదురుగా గల కోణములు సమానాలు.

* ఏదేని ఒక త్రిభుజము నందు ఒకటి కంటె ఎక్కువ లంబకోణములు ఉండవు.

* ఒక లంబకోణ త్రిభుజములో లంబకోణము పోను మిగిలిన రెండు కోణముల మొత్తము 90^0 గా ఉండును.

* ABCD చతురస్రంలో కర్ణాలు AC, BD లు '0' వద్ద ఖండించుకుంటే $\angle AOB = 90^0$.



* ABCD చతురస్రంలో AC కర్ణము అయితే $\angle BAC = 45^0$.

* త్రిభుజము యొక్క మూడు భుజములు తెలిసినప్పుడు దాని వైశాల్యము కనుగొను పద్ధతిని క్రీ.శ. మొదటి శతాబ్దంలో గ్రీకు గణిత శాస్త్రవేత్త "హీరోన్" కనిపెట్టాడు.

* **హిరోన్ సూత్రము :** a, b, c లు త్రిభుజ భుజాలైతే

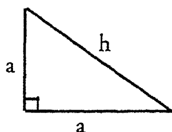
త్రిభుజ వైశాల్యము = $\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$

దీనిలో $S = \frac{a+b+c}{2}$ (S అనేది అర్థచుట్టుకొలత)

* లంబకోణ సమద్విబాహు త్రిభుజములో కోణములు (45^0, 45^0, 90^0) 1:1:2 నిష్పత్తిలో ఉంటే;

ఆ కోణముల ఎదుటి భుజములు $1:1:\sqrt{2}$ నిష్పత్తిలో ఉంటాయి.

* లంబకోణ సమద్విబాహు త్రిభుజంలో కర్ణము భుజమునకు $\sqrt{2}$ రెట్లు ఉండును.
  అనగా $h = a\sqrt{2}$ యూనిట్లు



* లంబకోణ సమద్విబాహు త్రిభుజవైశాల్యము $= \frac{1}{2}a^2$ చదరపు యూనిట్లు

* త్రిభుజములోని కోణాలు (30^0, 60^0, 90^0) 1:2:3 నిష్పత్తిలో ఉంటే వాటి ఎదుటి భుజాలు $1:\sqrt{3}:2$ నిష్పత్తిలో ఉంటాయి.

* సమబాహు త్రిభుజములో కోణాలు (60^0, 60^0, 60^0) 1:1:1 నిష్పత్తిలో ఉంటే వాటి భుజాలు 1:1:1 నిష్పత్తిలో ఉంటాయి.

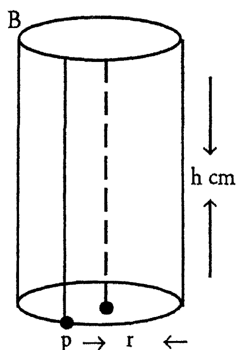
* 'a' యూనిట్లు భుజముగా గల సమబాహు త్రిభుజం ఎత్తు $= \frac{\sqrt{3}}{2}a$ యూ.

* సమబాహు త్రిభుజము యొక్క భుజము 'a' అయితే దాని
  వైశాల్యము$= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ చదరపు యూనిట్లు.

స్థూపము (Cylinder) : ప్రక్క తలాలు వక్రతలాలు, చివరలు సర్వసమాన వృత్తాలుగా ఉంటే వాటిని వృత్తాకార స్థూపాలు అంటారు.

వృత్తాకార స్థూపాలనే సూక్ష్మంగా "స్థూపాలు" అంటారు.

వీటి వృత్తాకార చివరల మధ్య బిందువులను కలుపు రేఖ భూమికి లంబంగా ఉంటే ఆ పటాన్ని క్రమ వృత్తాకార స్థూపం (లేదా) క్రమస్థూపం అంటారు.



* ఒక క్రమపట్టకం భూములు వృత్తాకారంగా ఉంటే అది "స్థూపము" అవుతుంది.

* స్థూపము కూడా ఒక పట్టకమే.

* స్థూపము ప్రక్కతల వైశాల్యము = P.h. చదరపు యూనిట్లు.

(ఇందులో P వృత్తాకారంలో నున్న స్థూపం భూమి చుట్టు కొలతను h స్థూపం ఎత్తును సూచిస్తాయి).

** స్థూపం భూవ్యాసార్ధము 'r, ఎత్తు 'h' అయితే,

(i) స్థూపము భూ చుట్టుకొలత = $2\pi r$ యూనిట్లు

(ii) స్థూపము ప్రక్కతల వైశాల్యం = $2\pi r h$ చదరపు యూనిట్లు

(iii) స్థూపము భూ వైశాల్యం = πr^2 చదరపు యూనిట్లు

(iv) స్థూప సంపూర్ణతల వైశాల్యం = వక్రతల వైశాల్యము + 2 × భూ.వై

$= 2\pi rh + 2\pi r^2$

$= 2\pi r\,(h + r)$ చదరపు యూనిట్లు

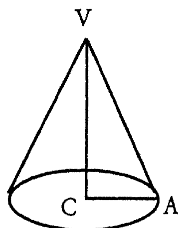
(v) స్థూప ఘనపరిమాణము (V) = స్థూప భూవైశాల్యం × ఎత్తు

$V = \pi r^2 h$

** గుల్ల స్థూపం ఘనపరిమాణము (V) = $\Pi(R + r)(R - r)h$ ఘ.యూ

$= \Pi(R^2 - r^2)h$ ఘ.యూ

** **శంకువు** (Cone) :



క్రమవృత్త శంకువు (Right Circular Cone): ఒక జ్యామితి వస్తువు. దీని అడుగుభాగం ఒక వృత్తం. దీనికి పై భాగాన శీర్షం ఉంటుంది.

(లేదా)

శంకువు శీర్షం V. V నుంచి శంకువు భూమికి గీయబడిన లంబము VC. ఈ లంబము శంకువు భూమి కేంద్రము గుండా పోవుచున్న ఆ శంకువును "క్రమవృత్త శంకువు" అని అంటారు.

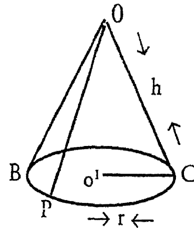
$\overline{VC}$ ని శంకువు అక్షం అంటారు.

$\overline{VA}$ను శంకువు ఏటవాలు ఎత్తు అంటారు (దీనిని l లేదా S తో సూచిస్తాం)

$\overline{CA}$ ను శంకువు భూవ్యాసార్థం అంటారు. (దీనిని r తో సూచిస్తాము)

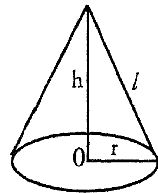
* DVCA లంబకోణ త్రిభుజము. కావున $l^2 = h^2 + r^2$

గుల్ల శంకువు (Hollow Cone) : OP రేఖా ఖండముచే జనింపబడిన శంకువు తలం శంకువు ప్రక్క తలాన్ని గుల్ల (బోలు) శంకువు అంటారు. గుల్ల శంకువుకు భూవ్యాసము (సమతలం వద్ద కల మధ్య దూరము) ఉంది. కాని మందం లేదు.



ఘన శంకువు (Solid Cone) : శంకువు వక్రతలం, దాని వృత్తాకార సమతల భూమిచే పరివృత్తమైన రోదసిలోని పటమే ఘన శంకువు.

** ఒక శంకువు యొక్క ఏటవాలు ఎత్తు $= l$; భూ వ్యాసార్థము $= r$; మరియు నిలువు ఎత్తు $= h$ అయితే



(i) $l^2 = h^2 + r^2$

(ii) శంకువు భూ వైశాల్యం (A) $= \pi r^2$ చ.యూ

(iii) శంకువు ప్రక్కతల వైశాల్యము $= \pi r l$

$= \pi r\sqrt{h^2 + r^2}$ చదరపు యూనిట్లు

(iv) శంకువు సంపూర్ణతల వైశాల్యము = ప్రక్కతల వైశాల్యం + భూవైశాల్యం

$= \pi r l + \pi r^2$

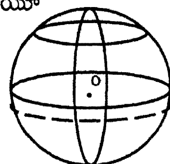
$= \pi r(l + r)$

$= \pi r\left[\sqrt{h^2 + r^2} + r\right]$ చ. యూ

(v) శంకువు ఘనపరిమాణము (V) $= \frac{1}{3} \times$ స్థూపం ఘనపరిమాణం

$(V) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ఘ.యూ

గోళము (Sphere) : ఒక జ్యామితి వస్తువు. అంతరాళంలో ఒక స్థిర బిందువు నుం సమానదూరంలో చలించు బిందు సముదాయమ



గోళ కేంద్రము (Centre of Sphere) : గోళంపై కల ప్రతి బిందువు ఒక స్థిర బిందువు నుండి సమాన దూరములో ఉండే బిందువు. అట్టి స్థిర బిందువును "గోళ కేంద్రము" అంటారు.

గోళ వ్యాసార్థము (Radius of Sphere) : గోళ కేంద్రము నుండి గోళంపై గల బిందువుకు గల దూరము. దీనిని 'r' తో సూచిస్తాము.

గోళ వ్యాసము (Diameter of Sphere) : గోళ కేంద్రము గుండాపోవు రేఖా ఖండాన్ని "గోళ వ్యాసము" అని అంటారు. దీనిని 'd' తో సూచిస్తాము.

$$d = 2r$$

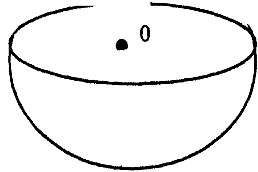
గుల్ల గోళం (Hollow Sphere) : కేంద్రం నుండి స్థిర దూరంలో గల అంతరాళ బిందువులచే ఏర్పడిన ఆకారము.

ఘనగోళము (Solid Sphere) : అంతరాళంలో ఒక గోళంచే ఆవరింపబడియున్న ప్రదేశాన్ని "ఘన గోళము" అంటారు.

ఇచ్చట ఘనగోళం కేంద్రము గోళానికి చెందుతుంది

ఉదా : గోళీలు.

అర్ధగోళము (Hemi-Sphere) :
గోళ కేంద్రము గుండా పోవు
సమతలం గోళాన్ని చేసిన
రెండు భాగాలలో ఒకటి.



గమనిక : అర్ధగోళం యొక్క సమతల భాగాన్ని "భూమి" అంటారు. ఇది వృత్తాకారంగా ఉంటుంది.

గోళాకార షెల్ (లేదా) గోళ కర్పరం (Spherical Shell) : రెండు ఘనగోళాల భేదము.

షెల్ మందం ఆ ఘనగోళాల వ్యాసార్థాల భేదము.

* గోళం కేంద్రము గోళానికి చెందిన బిందువు కాదు. గోళం ఒక ఉపరితలం. దానికి మందము లేదు.

* ఒక గోళాన్ని ఒక సమతలంచే ఎచ్చట ఖండించినను ఏర్పడు మధ్యచ్ఛేదాలు వృత్తాలు.

** గోళము వ్యాసార్థము 'r' అయితే

(i) గోళం ఉపరితల వైశాల్యము $A = 4\pi r^2$ చదరపు యూనిట్లు $= \pi d^2$

(ii) అర్ధగోళం ఉపరితల వైశాల్యము $= 2\pi r^2$

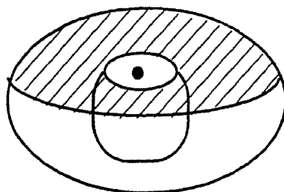
(iii) గోళం ఘనపరిమాణం $(V) = \frac{4}{3}\pi r^3$ ఘ. యూ.

(iv) అర్ధగోళ సంపూర్ణతల వైశాల్యము $= 3\pi r^2$ (యూనిట్లు)^2

** **గుల్ల అర్ధగోళం (గిన్నె ఆకారంలోనున్న)** (Hollow Hemi - Sphere) :

వెలుపలి వ్యాసార్ధము $= R$

లోపలి వ్యాసార్ధము $= r$ అయితే



(i) అర్ధగోళంగా ఉన్న చిప్ప ఘనఫలం

ఘనపరిమాణం $(V) = \frac{2}{3}\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi r^3$

$(V) = \frac{2}{3}\pi (R^3 - r^3)$ యూనిట్లు^{3}.

(ii) అర్ధగోళ వెలుపలి ఉపరితల వైశాల్యము $= 2\pi R^2$ చదరపు యూనిట్లు

(iii) అర్ధగోళ లోపలి ఉపరితల వైశాల్యం $= 2\pi r^2$ చ.యూ.

(iv) కంకణ అంచు వైశాల్యము $= \pi (R^2 - r^2)$ చ.యూ.

(అర్ధగోళ ఉపరితల కంకణ వైశాల్యం)

(v) సంపూర్ణతల వైశాల్యం = బయటి ఉపరితల వైశాల్యం + లోపలి ఉపరితల వైశాల్యం + కంకణ వైశాల్యం

$= [2\pi R^2 + 2\pi r^2 + \pi (R^2 - r^2)]$ చదరపు యూనిట్లు

$= \pi (3R^2 + r^2)$ చదరపు యూనిట్లు

* * *

18. బహుపదులు
(Polynomials)

* $a \neq 0$; $n \in N$ అవుతూ $ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + ... +$ (స్థిరపదము) రూపంలో ఉండే బీజీయ సమాసాన్ని చలరాశి x లో n వ పరిమాణ బహుపది అంటారు.

బహుపదుల సమితిపై సంకలన పరిక్రియ ధర్మాలు :

(i) **సంవృత న్యాయము** (Closure Property) : A, B లు బహుపదులైతే A+B కూడా ఒక బహుపదియే.

(ii) **వినిమయ ధర్మము** (Commutative Property) : A, B లు ఏవేని బహుపదులయితే A+B = B+A.

(iii) **సహచర ధర్మము** (Associative Property) : A, B, C లు ఏవేని బహుపదులు అయితే (A+B)+C = A+(B+C).

(iv) **తత్సమ ధర్మము** (Identity Property) : A ఒక బహుపది అయితే

A+0=0+A=A.

ఇచ్చట '0' సంకలన తత్సమము.

(v) **విలోమ ధర్మము** (Inverse Property) : ప్రతి బహుపది A కి అనుగుణంగా -A అనే బహుపది A+(-A) = (-A)+A = 0 అయ్యేట్లు ఉంటుంది.

ఇచ్చట -A; A కి సంకలన విలోమము.

** బహుపదుల సమితిపై గుణకార పరిక్రియ ధర్మాలు :

(i) **సంవృత ధర్మము :** A, B లు బహుపదులైతే A×B కూడా ఒక బహుపదియే.

(ii) **వినిమయ ధర్మము :** A, B లు బహుపదులు అయితే A×B = B×A.

(iii) **సహచర ధర్మము :** A, B, C లు ఏవేని బహుపదులు అయితే

(A×B)×C = A×(B×C)

(iv) **తత్సమ ధర్మము :** ప్రతి బహుపది A కి, A×1 = 1×A = A. ఇచ్చట "1" గుణకార తత్సమం.

(v) **విభాగ న్యాయము :** A, B, C లు ఏవేని బహుపదులు అయితే

A×(B+C) = A×B + A×C

గమనిక : ఏకపది x యొక్క విలోమము $\frac{1}{x}$

* $\frac{1}{x}$ బహుపది కాదు.
* బహుపదుల సమితిలో బహుపదులకు గుణకార విలోమాలు లేవు.
* బహుపదుల గుణకారంలో లబ్ధం యొక్క పరిమాణం గుణ్యగుణకముల పరిమాణాల మొత్తానికి సమానం.
* భాగఫలము యొక్క పరిమాణం = విభాజ్య పరిమాణం – విభాజక పరిమాణం.
* బహుపదులు భాగహార విశేషవిధి న్యాయాన్ని పాటిస్తాయి.

అనగా విభాజ్యం = విభాజకము × భాగఫలం (విభక్తం) + శేషం.

ప్రత్యేక లబ్ధాలు (Special Products) :

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

$(a+b)(a-b)= a^2-b^2$

$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^{2)}$

$a^3-b^3 = (a-b)\ (a^2+ab+b^2)$

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = a^3+b^3+c^3-3abc$

$(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab$

$(ax+b)(c+d) = acx^2+(ac+bd)x+bd$

$(x+a)(x+b)(x+c) = x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$

* x, y చలరాశుల్లో మొదటి తరగతి సమఘాత సమాసము యొక్క ప్రామాణిక రూపము "ax+by"
* x, y చలరాశుల్లో రెండో తరగతి సమఘాత సౌష్ఠవ సమాసం యొక్క ప్రామాణిక రూపము "$ax^2+bxy+ay^2$".
* $f(x, y, z) = f(y, z, x) = f(z, x, y)$ అయినప్పుడు x, y, z చలరాశుల్లో సమాసము చక్రీయము అవుతుంది.

శేష సిద్ధాంతము (Remainder Theorem) : చలరాశి x లో అకరణీయ సంఖ్యలు గుణకాలుగా గల బహుపది f(x) ని (x-a) చే భాగిస్తే వచ్చే శేషము f(a) అవుతుంది.

కారణాంక సిద్ధాంతము (Factorisation Theorem) : చలరాశి x లో అకరణీయ సంఖ్యలు గుణకాలుగా గల బహుపది f(x) మరియు f(a)=0 అయితే (x-a), f(x) కి ఒక కారణాంకము.

* చలరాశి x లో అకరణీయ సంఖ్యలు గుణకాలుగా గల బహుపది f(x) తరగతి ≥ 1 అయిన $r \in R$ కి అనుగుణంగా f(x) = (x-r) Q(x)+f(r) అయ్యేట్లు ఓ బహుపది Q(x) ఉంటుంది. ఇదియే శేష సిద్ధాంతము.

* f(x) బహుపదిలోని గుణకాల మొత్తము సున్నా అయితే (x-1); f(x) కు ఒక కారణాంక మవుతుంది.

* బహుపది f(x) లో x యొక్క సరిఘాతాల గుణకాల మొత్తము, x యొక్క బేసి ఘాతాల గుణకాల మొత్తానికి సమానము అయితే, f(x) కు (x+1) ఒక కారణాంకమవుతుంది.

* హార్నర్ సంశ్లేషణ భాగహార పద్ధతిని ఉపయోగించి f(x) యొక్క కారణాంకాలను కనుగొనవచ్చును.

* a, b, $c \in R$; $a \neq 0$ అయితే $ax^2 + bx + c = 0$ అనేది వర్గసమీకరణమును సూచించును.

* $ax^2 + bx + c = 0$ వర్గ సమీకరణము యొక్క మూలాలు α, β అయితే

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \; ; \; \beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ అగును.

* $ax^2 + bx + c = 0$ వర్గ సమీకరణము యొక్క మూలాలు α, β అయితే

(i) మూలాల మొత్తము = $\alpha + \beta = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{-(x \text{ గుణకం})}{(x^2 \text{ గుణకం})}$

(ii) మూలాల లబ్ధము = $\alpha \beta = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\text{స్థిరపదము}}{(x^2 \text{ గుణకం})}$

* α ; β లు మూలాలుగా గల వర్గ సమీకరణము

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$

* $a \neq 0$ అయినప్పుడు "b^2-4ac" ని $ax^2+bx+c = 0$ వర్గ సమీకరణము యొక్క విచక్షిణి అంటారు.

దీనిని సాధారణంగా 'D' తో సూచిస్తాము. అనగా $D \equiv b^2-4ac$

* వర్గ సమీకరణము యొక్క మూలాల స్వభావము దాని విచక్షణిపై ఆధారపడి ఉంటుంది.

* a, b, c లు వాస్తవ సంఖ్యలు; $a \neq 0$ వర్గ సమీకరణము $ax^2+bx+c = 0$ యొక్క మూలాలు α, β.

* (i) $D>0$ అయితే మూలాలు వాస్తవాలు; అసమానాలు

(ii) $D=0$ అయితే మూలాలు వాస్తవాలు; సమానాలు

(iii) $D<0$ అయితే మూలాలు కల్పితాలు; అసమానాలు.

* $a > 0$; $b, c \in R$ అయితే $ax^2+bx+c > 0$ (లేదా) $ax^2+bx+c < 0$ లను x అనే చలరాశిలో వర్గ అసమీకరణాలు అని అంటారు.

గణితానుగమన సిద్ధాంతము (Mathematical Induction) :

* గణితానుగమన సిద్ధాంతమును కొన్ని ప్రాథమిక సిద్ధాంతాలను నిరూపించడానికి ఉపయోగిస్తాము.

* ఒక ప్రవచనము P(n) ను నిరూపించాలంటే

(i) n = 1, 2, 3,........విలువలకు P(n) సత్యం అవుతుందో లేదో చూస్తాము.

(ii) (i) సత్యం అయితే P(n) 'K' పదాలకు సత్యం అవుతుందని అనుకుంటాము.

అనగా n = K కు P(n) సత్యం అనుకుంటాం.

(iii) ఆ తరువాత (k+1) పదాలకు P(n) సత్యం అయితే P(n) అనే ప్రవచనము n యొక్క అన్ని వాస్తవ విలువలకు సత్యము అని స్వీకరిస్తాము.

* గణితానుగమన సిద్ధాంతము ఒక నిరూపణ పద్ధతి మాత్రమే. దాన్ని ఒక తెలిసిన సూత్రాన్ని నిరూపించుటకు మాత్రమే ఉపయోగించవచ్చును; అంతేకాని ఒక సూత్రాన్ని కనుగొనటానికి ఉపయోగపడేది మాత్రం కాదు.

ద్విపది (Binomial) : రెండు పదాలున్న బీజీయ సమాసాన్ని "ద్విపది" అని అంటారు.

ఉదా : x+y; 2a-3b;..................

** **ద్విపద సిద్ధాంతము** (Binomial Theorem) :

ద్విపది (x+y) విభిన్న ఘాతాలు, వాటి విస్తరణలు :

$(x+y)^0 = 1$

$(x+y)^1 = x+y$

$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$

$(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$

$(x+y)^4 = x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$

$(x+y)^5 = x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$

పై విస్తరణల నుండి

(1) ప్రతి విస్తరణలో పదాల సంఖ్య (x+y) ఘాతంలోని ఘాతాంకము కన్నా ఒకటి ఎక్కువ.

(2) ప్రతి విస్తరణలో

(i) మొదటి పదము y యొక్క x ఘాతాంకము, ద్విపది ఘాతాంకమునకు సమానము. మొదటి పదంలో y యొక్క ఘాతాంకము సున్నా.

(ii) తరువాత వచ్చే ప్రతీ పదంలోను x యొక్క ఘాతాంకము అంతకు ముందు పదంకంటే 1 తగ్గుతూపోతే, y ఘాతాంకము అంతకు ముందటి పదంకంటె 1 పెరుగుతూ ఉంటుంది.

(iii) ప్రతి పదంలోనూ x, y ఘాతాంకముల మొత్తము ద్విపది ఘాతాంకానికి సమానము.

(iv) విస్తరణలోని చివరి పదంలో x ఘాతాంకము సున్నా కాగా y ఘాతాంకం ద్విపది ఘాతాంకానికి సమానము.

పాస్కల్ త్రిభుజము (Pascal Triangle) : ద్విపదిలోని విభిన్న ఘాతాంకాలకు అనుగుణంగా ఆ విస్తరణలోని పదాల గుణకాలు

ద్విపది యొక్క ఘాతంకం	విస్తరణలోని పదాల గుణకాలు
0	1
1	1,1
2	1,2,1
3	1,3,3,1
4	1,4,6,4,1
5	1,5,10,10,5,1
6	1,6,15,20,15,6,1
7	1,7,21,35,35,21,7,1

పై పట్టిక విస్తరణలో

(1) ప్రతి గుణకాల (అడ్డు) వరుస మొదటి, చివరి మూలకాలు ఒకటికి సమానము.

(2) తరువాతి గుణకం ఏదైనా దానికి ముందున్న వరుసలోని వెనువెంటనే దాని ఎడమ, కుడివైపుల నున్న గుణకాల మొత్తానికి సమానము.

పై వరుసల్లోని గుణకాల వరుసల అమరికను "పాస్కల్ త్రిభుజం" (లేదా) "అంకగణిత త్రిభుజం" అని అంటారు.

ద్విపద సిద్ధాంతము (ధన పూర్ణాంక ఘాతాంకమునకు) (Binomial Theorem for Positive Integer Index) :

n ఒక సహజ సంఖ్య అయిన

$$ {}^{n}c_{0}\, x^{n} + {}^{n}c_{1}\, x^{n-1}y + {}^{n}c_{2}\, x^{n-2}y^{2} + {}^{n}c_{3}\, x^{n-3}y^{3} + \ldots\ldots + {}^{n}c_{r}\, x^{n-r}y^{r} + \ldots\ldots + {}^{n}c_{n}\, y^{n} $$

ఇచ్చట ${}^{n}c_{0}$; ${}^{n}c_{1}$; ${}^{n}c_{2}$;............ ${}^{n}c_{n}$ లను ద్విపద గుణకాలు అంటారు.

* ${}^{n}c_{r} = \dfrac{n!}{(n-r)!r!}$

* $n! = 1\times2\times3\times4\times\ldots\ldots\ldots\ldots n$

* $0! = 1$

* $(x+y)^{n}$ విస్తరణలో (r+1) వ పదాన్ని సాధారణపదము అని అంటారు.

$$ T_{r+1} = {}^{n}c_{r}\, x^{n-r}.y^{r} $$

* ${}^{n}c_{r} = {}^{n}c_{n-r}$

* ${}^{n}c_{r} = {}^{n}c_{s}$ అయితే $r = s$ మరియు $n = r+s$ అగును.

* * *

19. ప్రాథమిక జ్యామితి భావనలు
(Basic Geometrical Concepts)

బిందువు (Point) : కాగితంపైన వాడియైన పెన్సిల్ మొనతో ఒక చుక్క నుంచుము. ఈ చుక్క బిందువు భావమును తెలియజేస్తుంది.

ఉదా : నల్లబల్లపైని చుక్క.

బిందువులను పెద్ద అక్షరాలు A, B, C, D,........ లతో సూచిస్తాము.

* బిందువుకు ఉనికి కలదు. ఉనికిని కనుగొనవచ్చు.

రేఖ (Line) : (◄────────►)

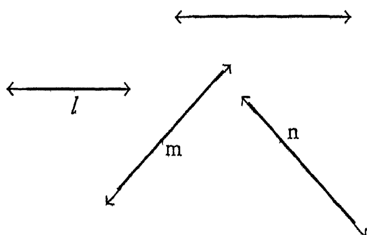
* ఒక రేఖకు చివరి బిందువులు ఉండవు. అది రెండు దిశలతో నిమిత్తం లేకుండా పొడగింపబడి ఉంటుంది.

ఉదా : కాగితంపై గుర్తింపబడిన పెన్సిలు గుర్తు ఒక రేఖ కాదు. కాని అది రేఖలో భాగం మాత్రమే.

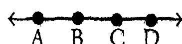
* ఒక రేఖ ఆధారభావం, దాని తిన్నని నైజం (స్వభావం) రెండు దిశలలోను మితం లేకుండా పొడిగింపబడి ఉండటం. దానికి చివరి బిందువులు లేవు.

* కొన్ని సందర్భాలలో రేఖలను చిన్న అక్షరాలైన *l*, m, n లతో సూచిస్తాము.

* ఒక రేఖ అపరిమిత సంఖ్యగల బిందువుల సమితి.

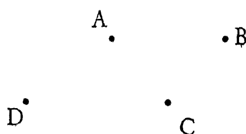


సరేఖీయ బిందువులు (Collinear Points) :



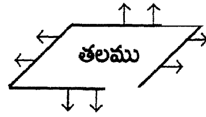
ఒకే రేఖపై గల బిందువులను సరేఖీయ బిందువులు అంటారు.

గమనిక : ఒకే రేఖపై లేని బిందువులను "భిన్న రేఖీయాలు" లేదా "సరేఖీయాలు కావు" అని అంటారు.



* 'n' బిందువుల ద్వారా గీయగల రేఖల సంఖ్య. $= \frac{n(n-1)}{2}$

సమతలం (Plane) : అపరిమితంగా అన్నివైపులా విస్తరించిన చదునైన తలాన్ని "సమతలం" అంటారు.



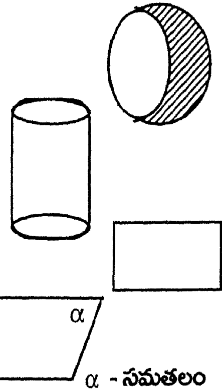
* చదునైన నల్లబల్ల పై భాగం తలం భావనను తెలియజేయును. నల్లబల్ల తలం సమతలంలో భాగం మాత్రమే.

* ఒక సమతలం ఒక బిందువుల సముదాయం. అది అపరిమిత బిందువుల సముదాయం.

ఉదా : ఒక బంతికి వంకర లేక వక్రతలం ఉంది.

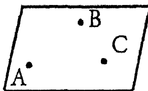
ఉదా : స్థూపానికి మూడు తలాలు కలవు. ఒక వక్రతలం మరియు రెండు చదునైన తలాలు (దాని అడుగు, పై భాగాలు)

* సాధారణంగా ఒక సమతలాన్ని ఒక దీర్ఘ చతురస్రం చేతగాని లేదా ఒక సమాంతర చతుర్భుజంగా గాని సూచిస్తాము.



* సమతలాలను సాధారణంగా A, B, C,... లేదా గ్రీకు అక్షరాలు α, β, γ, లతో సూచిస్తాము.

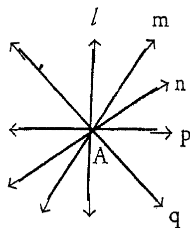
* ఒక సమతలాన్ని దానిపై గల మూడు లేక ఎక్కువ సరేఖీయాలు కాని బిందువులతో పిలుస్తాము.



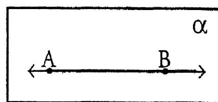
ABC సమతలం

సమతలంలో ఆపాత ధర్మాలు (Incidence Properties in a Plane) : ఒక సమతలంలోని బిందువుల, రేఖల మధ్యకల సంబంధాలను సమతంలోని ఆపాతధర్మాలు అంటారు.

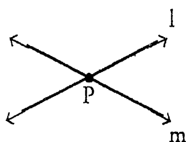
* ఒక సమతలంలో ఇచ్చిన బిందువు గుండా గీయగల రేఖల సంఖ్య అపరిమితం (అనంతం)



* సమతలంలో రెండు వేరువేరు బిందువుల గుండా ఒకే ఒక రేఖను గీయవచ్చు. ఆ రేఖ ఆ బిందువులను కలిగిన సమతలంలో పూర్తిగా ఉంటుంది.

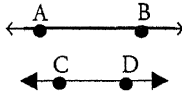


ఖండన రేఖలు మరియు ఖండన బిందువు (Intersecting Lines And Points of Intersection) : ఒక సమతలంలోని రెండు వేరు వేరు రేఖలకు ఒకే ఒక బిందువు ఉమ్మడిగా ఉంటే, ఆ రేఖలను "ఖండన రేఖలు" అంటారు.



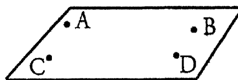
ఒక తలంలోని రెండు ఖండన రేఖలకు ఒకే ఒక ఉమ్మడి బిందువు ఉంటుంది. ఈ బిందువును "ఖండన బిందువు" అంటారు.

సమాంతర రేఖలు (Parallel Lines) : సమతలంలో ఖండించుకొనని సరళరేఖలను "సమాంతర రేఖలు" అని అంటారు.

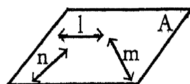


గమనిక : $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ కు సమాంతరంగా ఉంటే దానిని $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ తో సూచిస్తాము.

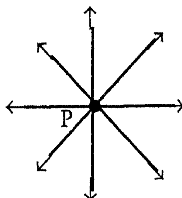
సతలీయ బిందువులు లేదా ఏకతలీయ బిందువులు (Coplanar Points) : ఒకే సమతలానికి చెందిన బిందువులను "సతలీయ బిందువులు" లేక "ఏకతలీయ బిందువులు" అని అంటారు.



సతలీయ రేఖలు (Coplanar Lines) : ఒకే సమతలానికి చెందిన రేఖలను "సతలీయ రేఖలు" అంటారు.



అనుషక్త రేఖలు లేదా మిళిత రేఖలు మరియు అనుషక్త బిందువు (Concurrent Lines And Point of Concurency) : ఒక తలంలో మూడు



లేదా అంతకన్నా ఎక్కువ రేఖలు ఒకే
ఒక బిందువు గుండా పోతే, వాటిని
"అనుషక్త రేఖలు" అని అంటారు.

ఆ రేఖలు పోయే బిందువును "అనుషక్త బిందువు" అంటారు.

అంతరాళము (Plane) : అన్ని బిందువుల సమితిని అంతరాళము అంటాము.

* రేఖలు, సమతలాలు అంతరాళంలో ఉంటాయి. కనుక అవి అంతరాళ ఉపసమితులు.

* * *

20. రేఖా ఖండము
(Line Segment)

రేఖా ఖండము (Line Segment) : చివరి బిందువులను, వాటి మధ్యగల బిందువులన్నింటిని కలిగిన బిందువుల సమితిని "రేఖా ఖండము" అని అంటారు.

* ఒక రేఖా ఖండానికి రెండు చివరి బిందువులు ఉంటాయి.



* రేఖా ఖండాన్ని దాని చివరి బిందువులతో పిలుస్తాము.
ఉదా : A, B లు చివరి బిందువులుగా గల రేఖా ఖండాన్ని రేఖా ఖండము AB అంటారు. దీనిని $\overline{AB}$ తో సూచిస్తాము.

* రేఖా ఖండము రేఖలో ఒక భాగము.

* $\overline{AB}$, $\overline{BA}$ లు ఒకే రేఖా ఖండాన్ని సూచిస్తాయి.

* $\overline{AB} = \overline{BA}$

* రేఖా ఖండము $\overline{AB}$ పొడవును లేక కొలతను AB తో సూచిస్తాము.

* రేఖా ఖండము పొడవు ఒక ధనసంఖ్య

* సమాన పొడవులు ఉండే రేఖా ఖండాలను సర్వసమాన రేఖా ఖండాలు అని అంటారు.

$\overline{AB}$; $\overline{CD}$ ల పొడవులు సమానము అయితే $\overline{CD} \cong \overline{AB}$

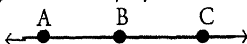
* ఒక రేఖపై అనంతమైన బిందువులను గుర్తించగలము.

* ఒక రేఖ అనంత బిందువుల సమితి.

* 'n' బిందువులు $\frac{n(n-1)}{2}$ రేఖా ఖండాలను ఏర్పరుస్తాయి.

* రెండు రేఖాఖండాలను పోల్చడం అంటే ఏది పొడవు; ఏది పొట్టిది అని చెప్పడం

* రెండు బిందువుల దూరము, ఈ బిందువులను కలిపే రేఖా ఖండము పొడవుకు సమానము.



మధ్యత్వం (Between ness) :

A, B, C లు సరేఖీయ బిందువులై, AB+BC = AC అయితే; A, C ల మధ్య B ఉంటుంది.

ఈ క్రమాన్ని A - B - C అని వ్రాస్తాము.

* A, B, C లు సరేఖీయాలు అయి, AB = BC అయితే AC మధ్య బిందువు B అగును.

* $\overline{AC}$ మధ్య బిందువు B అయితే $\overline{AC}$ ను 'B' సమద్విఖండన చేస్తుంది.

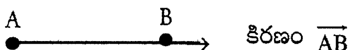
* పెద్ద పొడవులను కొలుచుటకు టేపును ఉపయోగిస్తాము.

1 మి.మి.	=	$\frac{1}{1000}$ మీ.		
1 సెం.మీ.	=	$\frac{1}{100}$ మీ.		
1 డెసి.మీ.	=	$\frac{1}{10}$ మీ.		
1 డెకా.మీ.	=	10 మీ.		
1 హెక్టా.మీ.	=	100 మీ.		
1 కిలో.మీ.	=	1000మీ.		
1 సెం.మీ.	=	10 మి.మీ		
1 డెసి.మీ.	=	10 సెం.మీ.		
1 మీ.	=	100 సెం.మీ	=	1000 మి.మి.

జ్యామితి పటాలు (Geometrical figures) :

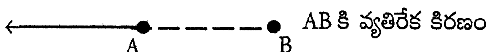












21. కిరణము; కోణము
(Rays And Angles)

* 0A కిరణము బిందువు "0" నుండి మొదలై, A గుండా అనిశ్చితముగా పోతుంది.
'0' ను కిరణం తొలిబిందువు అంటాము.

* 0A కిరణాన్ని $\overrightarrow{0A}$ తో సూచిస్తాము.

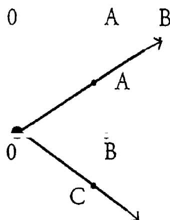
0 A

* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$ ల తొలి బిందువులు వేరువేరు కావున అవి వేరువేరు కిరణాలను సూచించును.

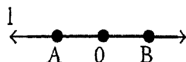
* $\overrightarrow{0A}$, $\overrightarrow{0B}$ ల తొలిబిందువు, దిశ ఒకటే

* ఒక బిందువు తొలిబిందువుగా అనేక కిరణాలను గీయవచ్చును.

* ఒక బిందువు తొలిబిందువుగాను, మరో బిందువు గుండా పోయే కిరణం ఒకటే ఉంటుంది.



* తొలి బిందువు దానిపై మరో బిందువు తెలిసినచో ఆ కిరణం నిర్ధారింపబడుతుంది.

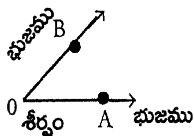


వ్యతిరేక కిరణాలు (Opposite Rays) :

'0' తొలిబిందువుగా రెండు కిరణాలు $\overrightarrow{0A}$, $\overrightarrow{0B}$ లు ఒకే రేఖకు ఇరువైపుల వ్యతిరేక దిశలో అనిశ్చితంగా పొడగింపబడి ఉంటే, ఆ కిరణాలను "వ్యతిరేక కిరణాలు" అని అంటారు.

గమనిక : $\overrightarrow{0A}$, $\overrightarrow{0B}$ లు వ్యతిరేక కిరణాలైన A, 0, B లు ఒకే రేఖపై ఉంటాయి. A, B, ల నడుమ 0 ఉంటుంది.

కోణము (Angle) : ఒకే తొలి బిందువు కల రెండు వేరువేరు కిరణాల సమ్మేళనాన్ని "కోణము" అని అంటారు.

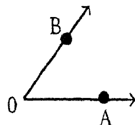


రెండు కిరణాలను దాని "భూజాలు" అంటాము.

ఉమ్మడి తొలిబిందువును "కోణ శీర్షము" అని అంటాము.

* కోణాన్ని '∠' తో సూచిస్తాము. సాధారణంగా కోణాన్ని సూచించడానికి పెద్ద అక్షరాలను వాడుతాము.

* ప్రక్కపటంలో గల కోణాన్ని ∠A0B లేక ∠B0A అని సూచిస్తాము. దీనిని "కోణం A0B" లేక "కోణం B0A" అని చదువుతాము. మధ్య అక్షరం కోణ శీర్షాన్ని సూచిస్తుంది.



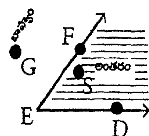
* ఒక కోణం, ఒక బిందువు ఒక సమతలంలో ఉంటే, ఆ బిందువు ఆ కోణానికి చెందుతుంది; లేక దాని అంతరానికి లేక దాని బాహ్యానికి చెందుతుంది.

* ఒక సమతంలోని ఒక కోణం ఆ తలాన్ని మూడు బిందు సమితులుగా విభజిస్తుంది. అవి :

  (i) కోణ బిందువుల సమూహం (F, E, D)

  (ii) కోణ అంతరంలో బిందువుల సమూహం (S)

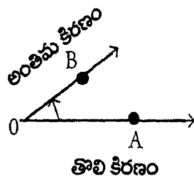
  (iii) కోణ బాహ్యంలో బిందువుల సమూహం (G)



తొలికిరణము మరియు అంతిమ కిరణము

(Initial Ray And Terminal Ray) :

$\overrightarrow{0A}$, $\overrightarrow{0B}$ అను కిరణాలలో $\overrightarrow{0A}$ ని స్థిరంగా ఉంచి $\overrightarrow{0B}$ ని '0' ఆధారంగా తిప్పిన కోణం ఏర్పడుతుంది.



స్థిరస్థానంలో ఉండే కిరణాన్ని "తొలి కిరణము" అని అంటారు. తిరుగుచున్న కిరణాన్ని "మలి కిరణము" (గమ్యకిరణం లేదా అంతిమ కిరణం) అని అంటారు.

* భ్రమణ కిరణం వేరువేరు స్థానాల ప్రకారము, వేరువేరు కోణాలు ఏర్పడును.

* భ్రమణమేది లేకుండా గమ్యకిరణం తొలికిరణంతో కలిసి ఉంటే అచ్చట ఏర్పడిన కోణం "సున్నా కోణం" అవుతుంది.

* కోణాన్ని కొలవడానికి ప్రమాణం ఒక డిగ్రీ. అది లంబకోణములో 90 వ భాగము.

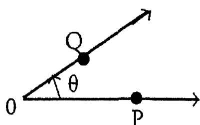
డిగ్రీ (Degree) : ఒక లంబకోణాన్ని 90 సమభాగాలు చేస్తే ఒక్కొక్క భాగాన్ని "డిగ్రీ" అని అంటారు.

గమనిక : 30 డిగ్రీలను "30^0" లతో సూచిస్తాము.

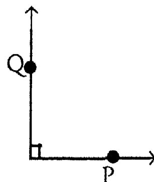
* కోణాలను వృత్త లేదా వర్తులామానంలో కూడా కొలుస్తారు.
* కోణాన్ని కొలువడానికి ప్రమాణంగా లంబకోణాన్ని తీసుకోవచ్చు.
* ఒక సంపూర్ణ కోణము = 4 లంబకోణాలు.
* ఒక సరళ కోణము = 2 లంబకోణాలు.
* ఒకే కొలత గల కోణాలను సర్వసమాన కోణాలు అంటారు. ఆ సంబంధాన్ని 'సర్వసమానం' అని అంటారు.
* దీనిని '$\cong$' తో సూచిస్తాము.

కోణాల రకాలు (Types of Angles) :

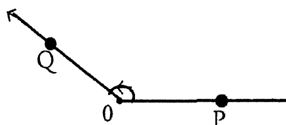
అల్పకోణము లేదా లఘుకోణము (Acute Angle) : 90^0 కంటే తక్కువ, 0^0 కంటే ఎక్కువ కొలత గల కోణాన్ని "అల్పకోణం" అని అంటారు.



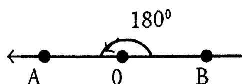
లంబకోణము లేదా సమకోణము (Right Angle) : 90^0 కొలత గల కోణాన్ని లంబకోణము అని అంటారు.



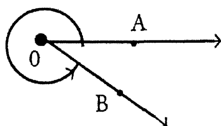
అధికకోణము లేదా గురుకోణము (Obtuse Angle) : 90^0 కంటే ఎక్కువ, 180^0 కంటే తక్కువ కొలత గల కోణాన్ని "అధికకోణం" (గురుకోణము) అని అంటారు.



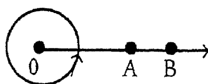
సరళకోణము (Straight Angle) : ఒక కోణము కొలత 180^0 అయితే దానిని "సరళ కోణము" అని అంటారు.



పరావర్తన కోణము (Reflex Angle) : 180^0 కంటే ఎక్కువ, 360^0 కంటే తక్కువ కొలత గల కోణాన్ని "పరావర్తన కోణం" అని అంటారు.



సంపూర్ణ కోణము లేదా పూర్తి కోణము (Complete Angle) : 360^0 కొలత గల కోణాన్ని "సంపూర్ణ కోణం" అని అంటారు.



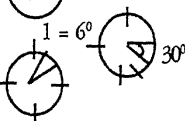
శూన్య (సున్నా) కోణము (Zero Angle): కోణం కొలత 0^0 అయితే దానిని "శూన్య కోణము" అని అంటారు.



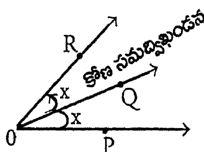
గమనిక :

* ఒక గంటలో నిమిషాల ముల్లు 360^0 తిరుగును.
* నిమిషాల ముల్లు ఒక నిమిషంలో 6^0 తిరుగును.
* ఒక గంటలో గంటల ముల్లు 30^0 తిరుగును.
* ఒక నిమిషంలో గంటల ముల్లు $1\frac{1}{2}^0$ తిరుగును.

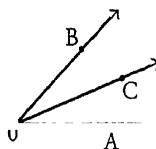




కోణ సమద్విఖండన రేఖ (Bisector of the Angle): ఒక కోణాన్ని రెండు సర్వసమాన కోణాలుగా విభజించే కిరణాన్ని కోణ సమద్విఖండన కిరణం (ద్విధాకర రేఖ) అంటారు.



ఆసన్నకోణాలు (Adjacent Angles): ఒక సమతలంలో ఉండే కోణాలకు ఒకే ఉమ్మడి శీర్షము, ఒక ఉమ్మడి భుజం ఉండి, వాటి అంతరాలకు ఒక సామాన్య బిందువు లేకుంటే ఆ కోణాలను "ఆసన్న కోణాలు" అని అంటారు.



ఉదా: $\angle AOC$; $\angle AOB$ (లేదా)

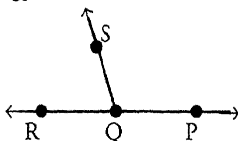
ఒక శీర్షం; ఒక ఉమ్మడి భుజం; అంతరాలకు సామాన్య బిందువు లేని రెండు ఏకతలీయ కోణాలను "ఆసన్న కోణాలు" అని అంటారు.

రేఖీయ జత (Linear Pair): ఒక జత ఆసన్నకోణాలలో ఉమ్మడిగా లేని భుజాలు వ్యతిరేక (అభిముఖ) కిరణాలైతే, అటువంటి ఆసన్న కోణాలను "రేఖీయ జత" (రేఖీయ ద్వయం) అంటారు.

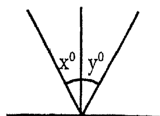
ఉదా : $\angle PQS$; $\angle RQS$ లు ఆసన్నకోణాలు.

$\overrightarrow{QP}$; $\overrightarrow{QR}$ లు వ్యతిరేక కిరణాలు.

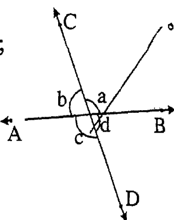
$\angle PQS$; $\angle RQS$ లను రేఖీయ జత అంటారు.



* ఒక రేఖీయద్వయం యొక్క సమద్విఖండన రేఖల మధ్యకోణం 90^0.



శీర్షాభిముఖ కోణాలు (Vertically Opposite Angles): రెండు రేఖలు ఖండించుకుంటే, నాలుగు కోణాలు ఏర్పడుతాయి. ఉమ్మడి భుజము లేని కోణాలను "శీర్షాభిముఖ కోణాలు" అంటారు.



గమనిక : ప్రక్క పటంలో a, b కోణాలు ఒక రేఖీయ జత; మిగిలిన రేఖీయ జతలు $\angle b, \angle c$; $\angle c, \angle d$; $\angle d, \angle a$ మరియు $\angle a$, $\angle c$ లు శీర్షాభిముఖ కోణాలు. వీటికి '0' ఉమ్మడి శీర్షం. కాని ఉమ్మడి భుజం లేదు. ఇదే విధంగా $\angle b$, $\angle d$ లు శీర్షాభిముఖ కోణాలు.

* శీర్షాభిముఖ కోణాల (ఎదురెదురు కోణాలు) కొలతలు సమానము.

సంపూరక కోణాలు (Supplementary Angles): రెండు కోణాల కొలతల మొత్తము 180^0 అయితే ఆ కోణాలను "సంపూరక కోణాలు" అని అంటారు.

గమనిక : $\angle a + \angle b = 60^0 + 120^0 = 180^0$ అయితే

$\angle b$ కి $\angle a$ సంపూరకము మరియు $\angle a$ కు $\angle b$ సంపూరకము.

పూరక కోణాలు (Complementary Angles) : రెండు కోణాల కొలతల మొత్తము 90^0 అయితే; వాటిని "పూరక కోణాలు" అని అంటారు.

* రెండు కోణాలు పూరకాలు అయితే, అవి పక్క పక్క కోణాలు కానవసరం లేదు.

లంబము (Perpendicular) : రెండు రేఖల మధ్య కోణము కొలత 90^0 అయితే, ఆ రేఖలు ఒక దానికి ఒకటి లంబముగా ఉంటాయి.

గమనిక : 'లంబము'గా ఉండటం అనే సంబంధాన్ని '$\perp$' గుర్తుతో సూచిస్తాము.

AB రేఖ; CD రేఖకు లంబముగా ఉంటే దానిని $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$తో సూచిస్తాము.

మూల మట్టాలు (Set Squares) : జ్యామితి పెట్టెలో త్రిభుజాకార పరికరాలను మూలమట్టాలు అంటారు.

* * *

22. సమాంతర రేఖలు
(Parallel Lines)

సమాంతర రేఖలు (Parallel Lines) : ఖండించుకోని ఏకతలీయ రేఖలను "సమాంతర రేఖలు" అని అంటారు.

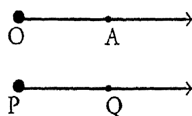
(లేదా)

రెండు రేఖలు ఒకే సమతలంలో ఉండి అవి ఖండించుకొననిచో ఆ రెండు రేఖలు సమాంతర రేఖలు.

* "సమాంతరంగా ఉన్నాయి" అనే సంబంధాన్ని "||" తో సూచిస్తాము.

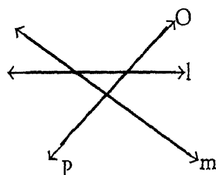
సమాంతర కిరణాలు (Parallel Rays) : రెండు కిరణాలు సమాంతరం అగుటకు అవి ఏ రేఖల భాగాలో ఆ రేఖలు సమాంతరంగా ఉండాలి.

* కిరణం 0A; కిరణం PQ సమాంతరంగా ఉంటే దానిని $\overrightarrow{0A} \parallel \overrightarrow{PQ}$ తో సూచిస్తాము.



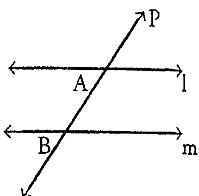
* l, m అను రెండు ఏకతల రేఖలు $l \cap m = \phi$ అగునట్లు ఉంటే వాటిని సమాంతర రేఖలు అంటారు.
* రెండు సమాంతర రేఖల మధ్యగల లంబదూరము ఎక్కడైనా సమానం. ఈ దూరాన్ని రెండు సమాంతర రేఖా ఖండాల మధ్యదూరం అంటారు.
* $l \parallel m$ మరియు $m \parallel n$ అయితే $l \parallel n$ అగును. అనగా రెండు సరళరేఖలు ఒకే సరళరేఖకు సమాంతరంగా ఉంటే ఆ రెండు ఒక దానికొకటి సమాంతరంగా ఉంటాయి.
* రెండు సరళరేఖలు ఒకే రేఖకు లంబాలైన, అవి పరస్పరం సమాంతరంగా ఉంటాయి. అనగా $m \perp l$; $n \perp l$ అయితే $m \parallel n$ అగును.
* ప్రతి రేఖ తనకు తాను సమాంతరంగా ఉంటుంది. అనగా $l \parallel l$
* రెండు సమాంతర రేఖల మధ్య కోణము సున్నా.

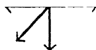
తిర్యగ్రేఖ (Transversal Line) : రెండు లేక అంతకంటే ఎక్కువ రేఖలను ఒక రేఖ వేరువేరు బిందువుల వద్ద ఖండిస్తే, దానిని ఆ రేఖలకు "తిర్యగ్రేఖ" అని అంటారు. OP తిర్యగ్రేఖ.



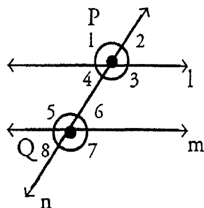
(లేదా)

P అను రేఖ l, m రేఖలను రెండు వేరువేరు బిందువులు A, B ల వద్ద ఖండిస్తే, P ను l, m రేఖలకు "తిర్యగ్రేఖ" అని అంటారు.



గమనిక :  తిర్యగ్రేఖ కాదు.

**** తిర్యగ్రేఖ రెండు రేఖలతో ఏర్పరిచే కోణాలు** (Angles made by the Transversal line with two Lines) : l, m రేఖలను తిర్యగ్రేఖ 'n' P, Q ల వద్ద ఖండిస్తుందనుకొనుము. P, Q ల వద్ద n చే ఏర్పడిన కోణాలను $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$, $\angle 5$, $\angle 6$, $\angle 7$, $\angle 8$ అనుకొనుము. అప్పుడు



(i) $\angle 3$, $\angle 4$, $\angle 5$, $\angle 6$ లను అంతరకోణాలు అని అంటారు.

(ii) $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 7$, $\angle 8$ లను బాహ్యకోణాలు అని అంటారు.

(iii) $\angle 1$, $\angle 5$; $\angle 4$, $\angle 8$; $\angle 2$, $\angle 6$; $\angle 3$, $\angle 7$ అను జతలను సంగత (సదృశ్య) కోణాలు అంటారు.

(iv) $\angle 4$, $\angle 6$; $\angle 3$, $\angle 5$ జతలను ఏకాంతర కోణాలు అంటారు.

(v) $\angle 1$, $\angle 7$; $\angle 2$, $\angle 8$ జతలను ఏకబాహ్య కోణాలు అంటారు.

(vi) $\angle 3$, $\angle 6$; $\angle 4$, $\angle 5$ జతలను తిర్యగ్రేఖకు ఒకేవైపు గల అంతర కోణాలు అంటారు.

గమనిక : త్రిభుజం యొక్క బాహ్యకోణము, అంతరాభిముఖ కోణం కంటె పెద్దది.

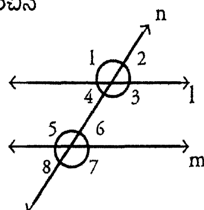
* ఒక తిర్యగ్రేఖ రెండు సమాంతర రేఖలను ఖండించిన

(i) సంగత కోణాల జతలు సమానము.

(ii) ఏకాంతర కోణాల జతలు సమానము.

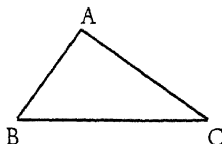
(iii) ఏకబాహ్య కోణాల జతలు సమానము.

(iv) తిర్యగ్రేఖకు ఒకేవైపు ఉన్న రెండు అంతర లేక బాహ్యకోణాల మొత్తము 180^0.



* * *

23. త్రిభుజము
(Triangle)

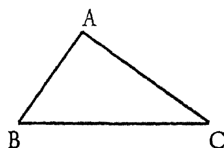


త్రిభుజము (Triangle) : మూడు భుజాలు గల బహుభుజిని "త్రిభుజము" అని అంటారు.

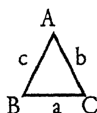
(లేదా)

మూడు రేఖా ఖండాలు గల సరళసంవృత పటాన్ని "త్రిభుజం" అని అంటారు.

త్రిభుజ శీర్షాలు (Vertices of Triangle) : త్రిభుజములో రెండు భుజాల ఖండన బిందువులను త్రిభుజ శీర్షాలు అని అంటారు. వీటిని కోణ బిందువులు అని కూడా అంటారు.



* త్రిభుజము ABC లో బిందువులు A, B, C లను త్రిభుజ శీర్షాలు అంటారు. $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ రేఖా ఖండాలను త్రిభుజ భుజాలు అంటారు.
* ఒక త్రిభుజము దాని శీర్షాలచే పిలువబడుతుంది. త్రిభుజం శీర్షాలు D, E, F అయితే ఆ త్రిభుజాన్ని DEF త్రిభుజం అని అంటారు.
* త్రిభుజానికి గుర్తు 'Δ'. ΔDEF ను త్రిభుజం DEF అని చదువుతాము.
* ΔABC లో త్రిభుజ శీర్షాల వద్ద ఏర్పడు కోణాలు $\angle CAB$, $\angle ABC$; $\angle BCA$ లను $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ లతో సూచిస్తాము.
* త్రిభుజ భుజాలను ఒక్కొక్కసారి చిన్న అక్షరాలతో సూచిస్తాము.

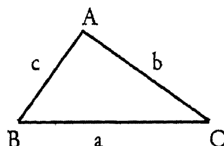


ΔABC లో A శీర్షానికి ఎదురుగా ఉండే భుజం $\overline{BC}$ ను 'a' తోను ;

B శీర్షానికి ఎదురుగా ఉండే భుజం $\overline{AC}$ ను 'b' తో ;

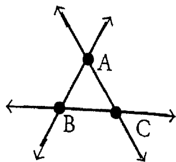
C శీర్షానికి ఎదురుగా ఉండే భుజం $\overline{AB}$ ను 'c' తోను సూచిస్తాము.

త్రిభుజం చుట్టుకొలత (Perimeter of Triangle) : త్రిభుజములోని మూడు భుజాల కొలతల మొత్తాన్ని "త్రిభుజం చుట్టుకొలత" అని అంటారు.



గమనిక : ΔABC చుట్టు కొలత = BC + CA + AB = a+b+c.

త్రిభుజం కోణాలు (Angles of Triangle) :



త్రిభుజములో మూడు కోణాలు ఉంటాయి.

$\overline{AB}$, $\overline{AC}$ భుజాలతో ఏర్పడు కోణాన్ని '$\angle A$' తోను

$\overline{BA}$, $\overline{BC}$ భుజాలతో ఏర్పడు కోణాన్ని '$\angle B$' తోను

$\overline{CA}$, $\overline{CB}$ భుజాలతో ఏర్పడు కోణాన్ని '$\angle C$' తోను సూచిస్తాము.

* ఒక త్రిభుజం అది ఉండే సమతలాన్ని మూడు బిందు సమితులుగా విభజిస్తుంది.
    (i) త్రిభుజం అంతరంలోని బిందువుల సమితి,
    (ii) త్రిభుజంపై గల బిందు సమితి.
    (iii) త్రిభుజం బాహ్యంలోని బిందుసమితి.

* ఒక త్రిభుజానికి ఆరు భాగాలు ఉన్నాయి. అవి 3 భుజాలు; 3 కోణాలు. ఇవిగాక ఒక త్రిభుజానికి 3 శీర్షాలున్నాయి. త్రిభుజంతో దాని అంతరం; బాహ్యం; వైశాల్యాలను కూడా జతపరచవచ్చు.

త్రిభుజాల వర్గీకరణ (Classification of Triangle) : త్రిభుజాలను

(i) వాటి భుజాల పొడవులను బట్టి;
(ii) వాటి కోణాల కొలతలను బట్టి వర్గీకరిస్తాం.

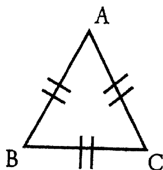
(a) **భుజాలను బట్టి (భుజాల కొలతల ప్రకారం) త్రిభుజాలను మూడు రకాలుగా విభజించవచ్చు.**

(i) సమద్విబాహు త్రిభుజము;
(ii) సమబాహు త్రిభుజము;
(iii) విషమబాహు త్రిభుజము.

(b) **కోణాలను బట్టి త్రిభుజాలను మూడు రకాలుగా విభజించవచ్చు.**

(i) అల్పకోణ త్రిభుజము;
(ii) లంబకోణ (సమకోణ) త్రిభుజము;
(iii) అధికకోణ త్రిభుజము.

సమబాహు త్రిభుజము (Equilateral Triangle) : ఒక త్రిభుజం యొక్క మూడు భుజాల పొడవులు సమానమైతే దానిని "సమబాహు త్రిభుజము" అని అంటారు.

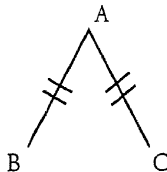


గమనిక : ΔABC సమబాహు త్రిభుజము అయితే

$$AB = BC = CA \text{ మరియు } \angle A = \angle B = \angle C.$$

* సమబాహు త్రిభుజంలోని ప్రతీ కోణము 60^0 గా ఉండును.

సమద్విబాహు త్రిభుజము (Isosceles Triangle) : ఒక త్రిభుజంలో దాని ఒక జత భుజాలు (కొలతలు) సమానమైన ఆ త్రిభుజాన్ని "సమద్విబాహు త్రిభుజం" అని అంటారు.



గమనిక : ΔABC సమద్విబాహు త్రిభుజము అయితే

$AB = BC \neq CA$ (లేదా) $BC = CA \neq AB$ (లేదా) $CA = AB \neq BC$.

* సమద్విబాహు త్రిభుజములోని అసమాన భుజాన్ని ఆ త్రిభుజ "భూమి" అంటారు.

ఉదా : సమద్విబాహు త్రిభుజము ABC లో $AB = BC$ అయితే CA ను ΔABC యొక్క భూమి అంటారు.

* సమద్విబాహు త్రిభుజంలో భూకోణాలు సమానము.

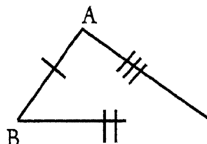
వివరణ : ABC సమద్విబాహు త్రిభుజములో $AB = AC$ అయితే $\angle B = \angle C$ అగును.

* సమద్విబాహు త్రిభుజంలో, సమాన భుజాలకు ఎదురుగా ఉండే కోణాలు సమానము.

* ఒక త్రిభుజంలో ఏవేని రెండు కోణాలు సమానమైన, ఆ కోణాలకు ఎదురుగా ఉండే భుజాలు సమానము.

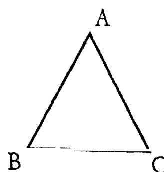
గమనిక : ప్రతి సమబాహు త్రిభుజము ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజం అవుతుంది.

విషమబాహు త్రిభుజము (Scalene Triangle) : ఏ రెండు భుజాల కొలతలు సమానంకాని త్రిభుజాన్ని "విషమబాహు త్రిభుజము" అని అంటారు.



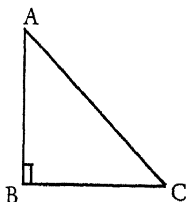
గమనిక : ΔABC ఒక విషమబాహు త్రిభుజము అయితే

$AB \neq BC \neq CA$ అగును.



అల్పకోణ త్రిభుజము (Acute Angle Triangle) : త్రిభుజంలోని ప్రతి కోణము అల్పకోణము అయితే ఆ త్రిభుజాన్ని "అల్ప (లఘు) కోణ త్రిభుజం" అని అంటారు.

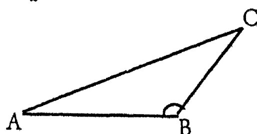
వివరణ : ΔABC ఒక అల్పకోణ త్రిభుజము అయితే, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$లు అన్నియు 90^0 కంటె తక్కువగా ఉండును.



లంబకోణ త్రిభుజము (Right Angled Triangle) : ఒక త్రిభుజంలోని ఒక కోణము లంబకోణమైన ఆ త్రిభుజాన్ని "లంబకోణ (సమకోణ) త్రిభుజం" అని అంటారు.

* ఒక లంబకోణ త్రిభుజంలో లంబకోణానికి ఎదురుగా ఉండు భుజాన్ని "కర్ణము" అని అంటారు.

* ఒక లంబకోణ త్రిభుజంలో కర్ణము మిక్కిలి పెద్ద భుజము.



అధిక కోణ త్రిభుజము (Obtuse Angled Triangle) : ఒక త్రిభుజములో ఒక కోణము అధిక కోణమైన ఆ త్రిభుజాన్ని "అధిక (గురు) కోణ త్రిభుజము" అని అంటారు.

లంబకోణ సమద్విబాహు (సమద్విబాహు లంబ) త్రిభుజము (Right Angled Isosceles Triangle) : రెండు భుజాలు సమానంగల లంబ త్రిభుజమును "సమద్విబాహు లంబ" (లేదా) "లంబసమద్విబాహు త్రిభుజం" అంటారు.

* ఒక త్రిభుజంలోని మూడు కోణాల కొలతల మొత్తము 180^0 (లేదా రెండు లంబకోణాలు).

* ఒక త్రిభుజంలో ఒక అధిక కోణం మాత్రమే ఉంటుంది. మిగిలిన రెండు కోణాలు అల్పకోణాలు.

* ఒక త్రిభుజంలో రెండు లంబకోణాలు ఉండవు.

** ఒక త్రిభుజంలోని రెండు కోణాల కొలతల మొత్తము మూడవ కోణానికి సమానమైన ఆ త్రిభుజాన్ని "లంబకోణ త్రిభుజము" అంటారు. అనగా ఒక త్రిభుజంలోని రెండు కోణాలు పూరకాలైతే, అది లంబకోణ త్రిభుజము అగును.

త్రిభుజము అసమానత్వాలు (Inequalities of Triangle) :

* త్రిభుజంలోని ఏ రెండు భుజాల కొలతల మొత్తమైనా మూడవ భుజం కొలత కన్నా ఎక్కువ. దీనినే "త్రిభుజ అసమానత్వ నియమం" అంటారు.

* ΔABC లో

(i) $AB+BC>CA$ (లేదా) $c+a>b$ (లేదా) $b<c+a$

(ii) $BC+CA>AB$ (లేదా) $a+b>c$ (లేదా) $c<a+b$

(iii) $CA+AB>BC$ (లేదా) $b+c>a$ (లేదా) $a<b+c$

* త్రిభుజం యొక్క ఏ రెండు భుజాల కొలతల భేదమైనా మూడవ భుజం కొలత కన్నా తక్కువ.

* ΔABC లో

(i) $AB\sim BC<AC$ (లేదా) $c\sim a<b$ (లేదా) $b>c\sim a$

(ii) $BC\sim CA<AB$ (లేదా) $a\sim b<c$ (లేదా) $c>a\sim b$

(iii) $CA\sim AB<BC$ (లేదా) $b\sim c<a$ (లేదా) $a>b\sim c$

త్రిభుజం భుజాల; కోణాల మధ్య సంబంధము (Relation Between Sides And Angles of a Triangle) :

* త్రిభుజంలో రెండు భుజాలు అసమానమైతే, పెద్ద భుజం ఎదురు కోణం కొలత చిన్న భుజం ఎదురు కోణం కొలతకన్నా పెద్దది.

* త్రిభుజంలో రెండు కోణాలు అసమానమైతే, పెద్ద కోణము ఎదురు భుజము చిన్న కోణం ఎదురు భుజం కన్నా పెద్దది.

వివరణ : ΔABC లో $\angle A > \angle B$ అయితే $BC > AC$ అగును.

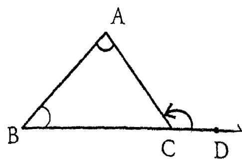
* విషమబాహు త్రిభుజంలోని ఏ రెండు కోణాలు సర్వసమానం కావు.

* ఒక త్రిభుజంలో ఏ రెండు భుజాలైన సమాంతరాలు కావు.

* త్రిభుజ శీర్షాలు మూడు ఒకే సరళరేఖపై ఉండవు.

* ఒక సమతలంలో ఒకే సరళరేఖపై లేని మూడు బిందువులు A, B, C, తీసుకొని రెండేసి బిందువులను రేఖా ఖండాలచే కలిపి త్రిభుజమును ఏర్పరచవచ్చు.

త్రిభుజ బాహ్య కోణము (Exterior Angle of a Triangle) : ΔABC భుజమైన BC ని D వరకు పొడిగిస్తే ఏర్పడు కోణము $\angle ACD$ ని "త్రిభుజ – బాహ్యకోణము" అని అంటారు.



$\angle A$, $\angle B$ లను $\angle ACD$ కి అంతరాభిముఖ కోణాలు అంటారు.

* $\angle ACD = \angle ABC + \angle CAB$

అనగా ఒక త్రిభుజ బాహ్య కోణము, దాని అంతరాభిముఖ కోణాల మొత్తానికి సమానము; అందుచేత బాహ్య కోణము దాని ప్రతి అంతరాభిముఖ కోణము కంటె పెద్దది.

* ఒక త్రిభుజంలోని రెండు కోణాలు సమానమైన వాటికెదురు భుజాలు సమానము.

* ఒకే ఆకారం; పరిమాణం గల రెండు సమతల పటాలను "సర్వసమాన పటాలు" అంటారు.

గమనిక : రెండు సర్వసమాన పటాలలో ఒక దానిని మరొక దానితో ఏకీభవించడానికి వీలవుతుంది.

ఉదా : రెండు రేఖా ఖండాల పొడవులు సమానమైతే అవి సర్వసమానాలు.



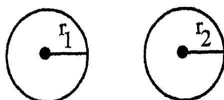
* సర్వసమానత్వాన్ని "$\cong$" గుర్తుచే సూచిస్తాము.

$\overline{AB}$, $\overline{CD}$ కి సర్వసమానమని తెలిపేందుకు $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ అని వ్రాస్తాం.

* $AB = CD$ అయితే $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

$AB \cong CD$ అయితే $AB = CD$.

* రెండు వృత్తాల వ్యాసార్ధాలు సమానము అయితే అవి సర్వసమానము.



$r_1 = r_2$

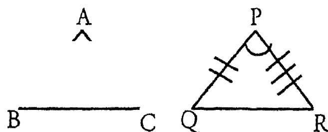
* అచ్ఛాదన పద్ధతిలో రెండు సర్వసమాన పటాలను పరస్పరం ఏకీభవింప చేయ వచ్చును.

సర్వసమాన త్రిభుజాలు (Congruent Triangles) : రెండు త్రిభుజాల ఆకారం; పరిమాణము ఒకటే అయిన అవి సర్వసమానం అవుతాయి.

త్రిభుజాల సర్వసమానత్వ సందర్భాలు (Cases of Congruency in Triangles) :

(i) భుజము; కోణము; భుజము (భు.కో.భు) సందర్భం :

రెండు త్రిభుజాలలో ఒక త్రిభుజంలోని రెండు భుజాలు; వాటి మధ్య కోణము వరుసగా రెండవ త్రిభుజంలోని రెండు భుజాలు వాటి మధ్య కోణానికి సమానంగా ఉంటే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానము.

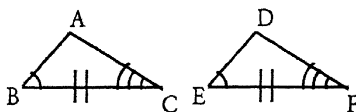


* DABC ; DPQR లలో AB = PQ; AC = PR మరియు ∠BAC = ∠QPR అయితే DABC ; DPQR లను సర్వసమాన త్రిభుజాలు అంటారు.

దీనిని $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ అని వ్రాస్తాము.

(ii) కోణం; భుజము; కోణము (కో.భు.కో) నియమము :

రెండు త్రిభుజాలలో ఒక త్రిభుజంలోని రెండు కోణాలు; ఒక భుజం వరుసగా రెండవ త్రిభుజంలోని రెండు కోణాలు, సంగత భుజానికి సమానమైతే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానము.

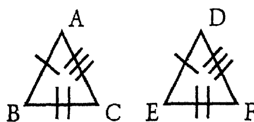


* DABC ; DDEF లలో BC = EF; ∠B = ∠E ; ∠C = ∠F అయితే DABC ; DDEF లను సర్వసమాన త్రిభుజాలు అంటారు.

దీనిని $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ అని వ్రాస్తాము.

(iii) భుజము; భుజము; భుజము (భు.భు.భు) నియమము :

రెండు త్రిభుజాలలో ఒక దాని మూడు భుజాలు వరుసగా రెండవ త్రిభుజంలోని మూడు భుజాలకు సమానం అయితే, ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానము.



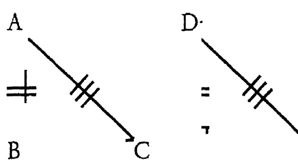
* DABC ; DDEF లలో AB = DE; BC = EF; AC = DF అయితే

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$ అగును.

ఈ సందర్భములో $\angle A = \angle D$; $\angle B = \angle E$; $\angle C = \angle F$ అగును.

(iv) లంబము; కర్ణము; భుజము (లం.క.భు) నియమము :

రెండు లంబకోణ త్రిభుజాలలో ఒకదాని భుజం, కర్ణం వరుసగా రెండవ త్రిభుజంలోని భుజం, కర్ణానికి సమానమైతే ఆ రెండు లంబకోణ త్రిభుజాలు సర్వసమానాలు.



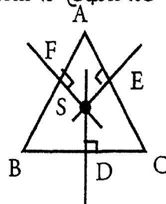
* DABC ; DDEF లలో $\angle B = \angle E = 90^0$;

భుజము AB = భుజం DE ; కర్ణము AC = కర్ణం DF.

అయితే $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ అగును.

గమనిక : భు.కో.భు; కో.భు.కో; భు.భు.భు.; లం.క.భు. ధర్మాలలో ఏదేని ఒకదాని ప్రకారం రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానమైతే ఆ త్రిభుజాలలోని మిగిలిన సంగత భాగాలు సమానము అగును. వైశాల్యాలు కూడా సమానము. అంతే కాకుండా ఒక త్రిభుజం తాలూకు ప్రత్యేక విశిష్టత గల బిందువులైన పరివృత్త కేంద్రము, లంబకేంద్రము; గురుత్వ కేంద్రము మొదలైనవి, లంబసమద్వి ఖండన రేఖలు; ఉన్నతులు; మధ్యగత రేఖలు మొదలైనవి రెండో సర్వసమాన త్రిభుజానికి అవే అవుతాయి.

* ఒక త్రిభుజములోని మూడు భుజాల లంబసమద్విఖండన రేఖలు మిళితాలు (అనుషక్తాలు). ఈ అనుషక్త బిందువును పరికేంద్రము అందురు.

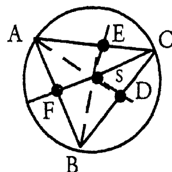


* ఒక త్రిభుజ భుజాల లంబసమద్విఖండన రేఖల మిళిత బిందువు ఆ త్రిభుజ శీర్షాల నుండి సమానదూరంలో ఉంటుంది.

పరివృత్తము మరియు పరికేంద్రము

(Circum Circle and Circum Centre) :

త్రిభుజ శీర్షాల గుండాపోయే వృత్తాన్ని "పరివృత్తము" అని అంటారు.



పరివృత్తము యొక్క కేంద్రాన్ని "పరివృత్త కేంద్రము" లేదా "పరికేంద్రము" అని అంటారు.

పరివృత్తము యొక్క వ్యాసార్ధాన్ని "పరివ్యాసార్ధము" అని అంటారు.

* పరివృత్త కేంద్రము త్రిభుజ శీర్షాలకు సమాన దూరంలో ఉంటుంది.

  సాధారణంగా త్రిభుజ పరివృత్త కేంద్రాన్ని "S" తోను మరియు పరివ్యాసార్ధాన్ని "R" తోను సూచిస్తాము.

* ΔABC యొక్క పరివృత్త కేంద్రము 'S' మరియు పరివ్యాసార్ధము 'R' అయితే $SA = SB = SC = R$ అగును.

* పరివృత్తము త్రిభుజమును పరిలిఖితం చేస్తుంది. అంటాము. (లేదా) త్రిభుజం వృత్తంలో లిఖింపబడింది అంటాము.

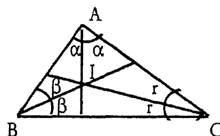
త్రిభుజాలలో పరివృత్త కేంద్రాల స్థానాలు (Positions of Circum Centres in Triangles) :

(i) అల్పకోణ త్రిభుజంలో పరివృత్త కేంద్రము త్రిభుజం అంతరంలో ఉంటుంది.

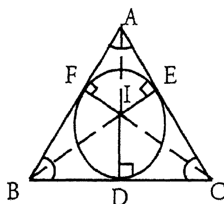
(ii) అధిక కోణ త్రిభుజంలో పరివృత్త కేంద్రము త్రిభుజం బాహ్యంలో ఉంటుంది.

(iii) లంబకోణ త్రిభుజంలో పరికేంద్రము త్రిభుజ కర్ణంపై ఉంటుంది. అంతేకాక పరికేంద్రము కర్ణము మధ్య బిందువు అగును.

* త్రిభుజంలోని అంతరకోణ సమద్విఖండన రేఖలు మిళితాలు. ఈ మిళిత బిందువును "అంతర కేంద్రము" అంటారు.



* ΔABC యొక్క అంతరకోణ సమద్విఖండన రేఖల మిళిత బిందువు 'I' మరియు I నుండి ΔABC భుజాలైన BC, CA, AB ల పైకి గల లంబపాదాలు D, E, F అయితే $ID = IE = IF$ అగును.



* త్రిభుజ అంతరకోణ సమద్విఖండన రేఖల మిళిత బిందువు, ఆ త్రిభుజ భుజాల నుండి సమాన దూరంలో ఉంటుంది.

అంతర వృత్తము; అంతర కేంద్రము మరియు అంతర వృత్త వ్యాసార్ధము (Circum Circle; Circum Centre And Circum Radius) :

త్రిభుజ అంతరకోణము సమద్విఖండన రేఖల మిళిత బిందువైన "I" ని త్రిభుజ అంతరకేంద్రము అంటారు.

ఒక త్రిభుజంలోని మూడు భుజాలను తాకుతూ త్రిభుజంలోపల ఉండే వృత్తాన్ని ఆ త్రిభుజ "అంతర వృత్తము" అంటారు.

అంతర వృత్త వ్యాసార్ధమునే ఆ త్రిభుజ అంతర వ్యాసార్ధం అంటారు. దీనిని "r" తో సూచిస్తాము.

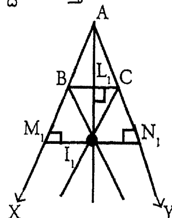
* అంతర వృత్తకేంద్రము త్రిభుజ భుజాల నుండి సమాన దూరంలో ఉంటుంది.

* ఒక త్రిభుజం మూడు భుజాలను తాకే (స్పృశించుచున్న) వృత్తము త్రిభుజం లోపల వుంటుంది. ఈ వృత్తమును త్రిభుజ "అంతర వృత్తము" లేక "అంతర్లిఖిత వృత్తము" అంటారు.

* అంతర కేంద్రము (I) ఎల్లప్పుడు త్రిభుజం అంతరంలో ఉంటుంది.

* ఒక త్రిభుజం రెండు బాహ్యకోణ సమద్విఖండన రేఖలు మిగిలిన మూడవ అంతరకోణం సమద్విఖండన రేఖ మిళితాలు. ఆ మిళిత బిందువు త్రిభుజ భుజాల నుండి సమాన దూరంలో ఉంటుంది.

గమనిక : ΔABC లో B, C కోణాల బాహ్య సమద్విఖండన రేఖలు, A కోణ అంతర సమద్విఖండన రేఖలు I_1 వద్ద కలుస్తాయి.

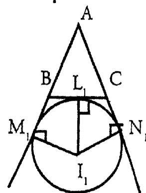


* I_1 నుండి BC, AX, AY లకు గీచిన లంబపాదాలు వరుసగా L_1, M_1, N_1 లు అయితే $I_1L_1 = I_1M_1 = I_1N_1$.

* I_1 బిందువు త్రిభుజ భుజాలకు సమాన దూరంలో ఉంటుంది.

బాహ్య వృత్తము; బాహ్య కేంద్రము మరియు బాహ్య వృత్త వ్యాసార్ధము (Excircle; Excentre And Exradius) :

త్రిభుజ భుజాలను తాకుతూ దానికి పూర్తిగా బయటనే ఉండే వృత్తాన్ని "త్రిభుజ బాహ్యావృత్తం" అంటారు.



ఈ బాహ్యవృత్తం A శీర్షానికి ఎదురుగా ఉన్న ఈ వృత్త కేంద్రమును బాహ్య (వృత్త) కేంద్రము అంటారు.

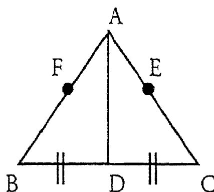
ఈ వృత్త వ్యాసార్ధమును బాహ్య (వృత్త) వ్యాసార్ధము అంటారు. దీనిని r_1 చే సూచిస్తాము. (లేదా)

త్రిభుజ భుజాలను తాకే ఈ మూడు వృత్తాలలో ప్రతి దానిని త్రిభుజ బాహ్య వృత్తం అని, దాని వ్యాసార్ధాన్ని బాహ్య వ్యాసార్ధము అని, దాని కేంద్రాన్ని "బాహ్య కేంద్రము" అని అంటారు.

* ప్రతి త్రిభుజానికి మూడు బాహ్య వృత్తాలు ఉంటాయి. వీటి కేంద్రాలను I_1, I_2, I_3 మరియు వ్యాసార్ధాలను r_1, r_2, r_3 లతో సూచిస్తాము.

మధ్యగత రేఖలు (Medians) : ΔABC లోని భుజాలు BC, CA, AB ల మధ్య బిందువులు వరుసగా D, E, F అయితే

AD, BE, CF రేఖా ఖండాలను "త్రిభుజం మధ్యగత రేఖలు" అంటారు.

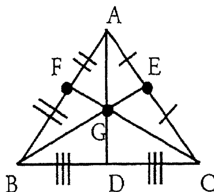


అనగా త్రిభుజ శీర్షాలను ఎదుటి భుజాల మధ్య బిందువులకు కలుపు రేఖా ఖండాలను "మధ్యగత రేఖలు" అంటారు.

* ఒక త్రిభుజ మధ్యగత రేఖలు అనుషక్తాలు (మిళితాలు).

గురుత్వకేంద్రము (లేదా) కేంద్రాభాసము (Centroid) : ఒక త్రిభుజం మధ్యగత రేఖల మిళిత బిందువును గురుత్వ కేంద్రము (గరిమనాభి) అందురు.

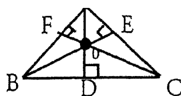
* AG = 2 GD (లేదా)
AG:GD = 2:1 అంటే G, AD కి త్రిధాకరణ బిందువు. ఇదే విధంగా
BG:GE = 2:1; CG:GF = 2:1



* గురుత్వకేంద్రము 'G', ప్రతి మధ్యగత రేఖకు త్రిధాకరణ బిందువు.

* G ఎల్లప్పుడు త్రిభుజంలోనే ఉంటుంది.

త్రిభుజ ఉన్నతులు (Altitudes of Triangle) : త్రిభుజ శీర్షాల నుండి ఎదుటి భుజాలకు గీయబడిన లంబాలను "త్రిభుజ ఉన్నతులు" అంటారు.



* ΔABC లో AD, BE, CF లను ఉన్నతులు అంటారు.
* $\angle ADB = \angle ADC = 90^0$
* ప్రతి త్రిభుజ ఉన్నతులు మిళితాలు.

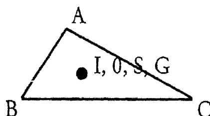
లంబకేంద్రము (Orthocentre) : త్రిభుజ ఉన్నతుల మిళిత బిందువును "లంబకేంద్రము" అంటారు.

* (i) అల్పకోణ త్రిభుజము యందు లంబకేంద్రము త్రిభుజం అంతరంలో ఉంటుంది.

  (ii) అధికకోణ త్రిభుజము యందు లంబకేంద్రము త్రిభుజం బాహ్యంలో ఉంటుంది.

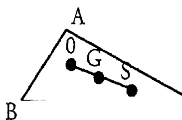
  (iii) లంబకోణ త్రిభుజము యందు లంబకేంద్రము లంబకోణ శీర్షంతో ఏకీభవిస్తుంది.

* సమబాహు త్రిభుజంలో పరివృత్త కేంద్రము 'S'; గురుత్వకేంద్రము 'G'; లంబకేంద్రము 'H' (0); అంతర కేంద్రము 'I' ఒక దానితో ఒకటి ఏకీభవిస్తాయి.



* సమబాహు త్రిభుజంలో పరివృత్త కేంద్రము (S); గురుత్వకేంద్రము (G); లంబకేంద్రము (0) లు సరేఖీయాలు.

* లంబకేంద్రము (0); పరివృత్త కేంద్రాలను (S) కలుపు రేఖా ఖండాన్ని గురుత్వ కేంద్రము (G) 2:1 నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది.
  0G : GS = 2:1



* 0; G; S బిందువుల ద్వారా పోవు రేఖను ΔABC యొక్క "అయిలర్ రేఖ" అంటారు.

త్రిభుజాల నిర్మాణము (Construction of Triangles) :

* ఒక త్రిభుజాన్ని నిర్మించేందుకు మూడు స్వతంత్ర కొలతలు కావాలి.
* ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజాన్ని గీసేందుకు రెండు స్వతంత్ర కొలతలు చాలును.
* ఒక సమబాహు త్రిభుజాన్ని నిర్మించుటకు ఒక స్వతంత్ర కొలత చాలును.

* ఒక లంబకోణ త్రిభుజాన్ని గీయడానికి రెండు స్వతంత్ర కొలతలు చాలును.

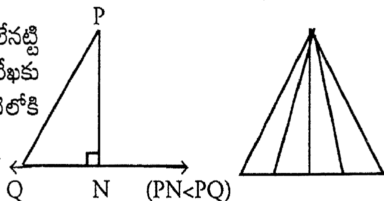
గమనిక : రెండు భుజాలు, వాటిలో ఒక దాని ఎదుటి కోణము తెలిసిన త్రిభుజ నిర్మాణ పద్ధతిని ఉపయోగించి త్రిభుజమును నిర్మించవచ్చు. ఈ నిర్మాణమును "సందిగ్ధ త్రిభుజ నిర్మాణము" అని అంటారు.

* ఒక త్రిభుజములో రెండు భుజములు అసమానములు అయితే, పెద్ద భుజమునకు ఎదురుగా నుండు కోణము, చిన్న భుజమునకు ఎదురుగా ఉండు కోణము కంటె పెద్దది.

* ఒక త్రిభుజములో రెండు కోణములు అసమానములు అయిన, పెద్ద కోణమునకు ఎదురుగా నుండు భుజము, చిన్నకోణమునకు ఎదురుగా ఉండు భుజము కంటె పెద్దది.

లంబదూర సిద్ధాంతము (Perpendicular Distance Theorem) :

ఒక దత్త సరళరేఖలో లేనట్టి దత్త బిందువు నుండి ఆ సరళరేఖకు గీసిన రేఖా ఖండము లన్నింటిలోకి లంబదూరము మిక్కిలి చిన్నది.



బిందువు నుండి సరళరేఖకు గల దూరము (Distance from a Point to a Line):

ఒక బిందువు నుండి ఒక రేఖపైకి గీయబడిన లంబరేఖా ఖండాన్ని, ఆ బిందువు నుండి ఆ సరళరేఖ దూరము అంటారు.

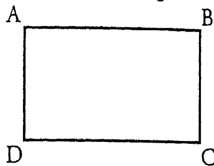
* ఒక త్రిభుజము యొక్క ఆకారం దాని మూడు కోణాలచేత నిర్ణయింపబడుతుంది.

* త్రిభుజము యొక్క పరిమాణము దాని మూడు భుజాలచేత నిర్ణయింపబడుతుంది.

* * *

24. చతుర్భుజాలు
(Quadrilaterals)

చతుర్భుజము (Quadrilateral) : ఒక చతుర్భుజము ఒక సరళ సంవృత పటము.



* ఏ రెండు రేఖా ఖండాలు చివరి బిందువుల వద్ద తప్ప ఇతరత్ర ఖండించుకోని నాలుగు సతలీయ రేఖా ఖండాలచే చతుర్భుజం ఏర్పడుతుంది.

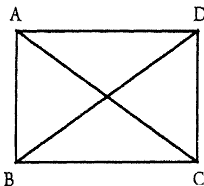
* AB, BC, CD, DA రేఖా ఖండాలచే ఏర్పడు దానిని చతుర్భుజము ABCD అంటారు.
  AB, BC, CD, DA లను చతుర్భుజ భుజాలు అనీ; A, B, C, D బిందువులను శీర్షాలు అని అంటారు.

  $\angle DAB$, $\angle ABC$; $\angle BCD$, $\angle CDA$ లను చతుర్భుజ కోణాలనీ అంటారు. వీటిని $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$ లతో సూచిస్తాము.

* ఒక చతుర్భుజములోని కోణాల మొత్తము 360^0 (లేక) నాలుగు లంబకోణాలు.

చతుర్భుజము చుట్టుకొలత (Perimeter of a Quadrilateral) :
చతుర్భుజములోని అన్ని భుజాల పొడవుల మొత్తాన్ని "చతుర్భుజం చుట్టుకొలత" అని అంటారు.

అనగా ABCD చతుర్భుజములో దాని భుజాల పొడవుల మొత్తం అంటే AB+ BC+CD+DA ను చతుర్భుజం చుట్టుకొలత అంటారు.

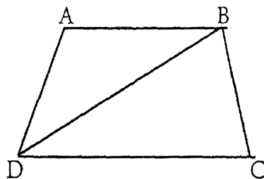


వివరణ : ABCD చతుర్భుజములో AB, BC; BC, CD; CD, DA మరియు DA, AB లను ఆసన్న భుజాలు అనీ;
$\angle A$, $\angle B$; $\angle B$, $\angle C$; $\angle C$, $\angle D$ మరియు $\angle D$, $\angle A$ లను ఆసన్న కోణాలు అనీ,
AB, CD; BC, AD లను ఎదుటి భుజాలు అని
$\angle A$, $\angle C$; $\angle B$, $\angle D$ లను ఎదుటి కోణాలు అని
A, C మరియు B, D లను ఎదుటి శీర్షాలు అని
AC, BD రేఖా ఖండాలను కర్ణాలు అని అంటారు.

కర్ణము (Diagonal) : ఎదుటి శీర్షాలను కలుపగా ఏర్పడే రేఖా ఖండాన్ని "కర్ణం" అని అంటారు.

* చతుర్భుజానికి నాలుగు భుజాలు; నాలుగు కోణాలు; రెండు కర్ణాలు ఉంటాయి.

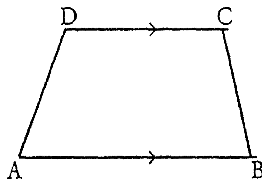
* ABCD చతుర్భుజాని కర్ణము BD ΔABD ; ΔBCD అను రెండు త్రిభుజాలుగా విభజిస్తుంది.



* ఒక చతుర్భుజములోని నాలుగు అంతర లేదా బాహ్యకోణాలు మొత్తము 360^0.

చతుర్భుజ రకాలు (Types of Quadrilaterals) :

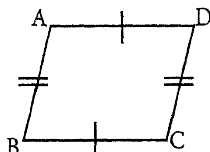
(i) **ట్రెపిజియం (లేదా) సమలంబ చతుర్భుజము** (Trapezium) : ఒక జత ఎదుటి భుజాలు సమాంతరంగా గల చతుర్భుజాన్ని "ట్రెపిజియం" అని అంటారు.



* సమాంతర రేఖల మధ్య దూరము సమానం.

(ii) **సమాంతర చతుర్భుజము** (Parallelogram) : రెండు జతల ఎదుటి భుజాలు సమాంతరంగా గల చతుర్భుజాన్ని "సమాంతర చతుర్భుజం" అని అంటారు.

* ABCD సమాంతర చతుర్భుజంలో AB, CD కి సమాంతరము మరియు BC, AD కి సమాంతరము.

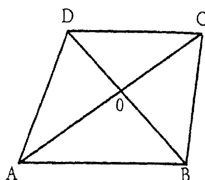


* సమాంతర చతుర్భుజములో ఏ రెండు ఎదుటి భుజాలైన సమానం. అనగా AB = CD; AD = BC.

* ఒక సమాంతర చతుర్భుజములో ఏ

రెండు ఎదుటి కోణాలైన సమానము

అనగా $\angle A = \angle C$; $\angle B = \angle D$

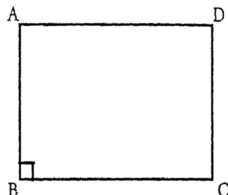


* ఒక సమాంతర చతుర్భుజములో కర్ణాలు ఒకదాని నొకటి సమద్విఖండన చేసుకొంటాయి. అనగా A0 = 0C; B0 = 0D

* ఒక సమాంతర చతుర్భుజములో ప్రతి కర్ణము దానిని రెండు సర్వసమాన త్రిభుజాలుగా విభజిస్తుంది.

* ఒక సమాంతర చతుర్భుజములోని ఏ రెండు ఆసన్నకోణాల మొత్తమైనను 180^0 (లేదా) ఆ కోణాలు సంపూరకాలు.

(iii) **దీర్ఘచతురస్రము** (Rectangle) : ఒక సమాంతర చతుర్భుజంలోని ఒక కోణము లంబకోణమైతే, దానిని ఒక "దీర్ఘచతురస్రము" అంటారు.

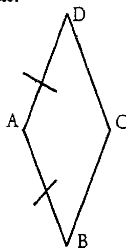


* దీర్ఘచతురస్రములో ప్రతి కోణము 90^0
* దీర్ఘ చతురస్రంలో ఎదుటి భుజాలు, ఎదుటి కోణాలు సమానము.
* దీర్ఘ చతురస్రములో కర్ణాలు పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకొంటాయి.
* దీర్ఘ చతురస్రంలో ప్రతి కర్ణం, దీర్ఘ చతురస్రాన్ని రెండు సర్వసమాన త్రిభుజాలుగా విభజిస్తుంది.
* ఒక దీర్ఘ చతురస్రం యొక్క కర్ణాలు సమానము.

గమనిక : ప్రతి దీర్ఘ చతురస్రము ఒక సమాంతర చతుర్భుజము. కాని ప్రతి సమాంతర చతుర్భుజం దీర్ఘ చతురస్రం కానవసరము లేదు.

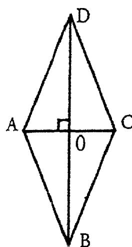
(iv) **రాంబస్ (లేదా) సమబాహు చతుర్భుజము** (Rhombus) : రెండు ఆసన్నభుజాలు సమానంగా గల సమాంతర చతుర్భుజాన్ని "రాంబస్"అని అంటారు. (లేదా)

అన్ని భుజాలు సమానంగా గల చతుర్భుజమును "రాంబస్" అంటారు.



* రాంబస్‌లో అన్ని భుజాలు సమానము. అనగా ABCD ఒక రాంబస్ అయితే AB = BC = CD = DA.

* రాంబస్ ఒక సమాంతర చతుర్భుజం.
* చతురస్రం ఒక విశిష్టమైన రాంబస్.
* రాంబస్‌లోని కర్ణాలు పరస్పరం లంబసమద్విఖండనము చేసుకొంటాయి.
* రాంబస్ ప్రతి కర్ణము దానిని రెండు సర్వసమాన త్రిభుజాలుగా విభజిస్తుంది.

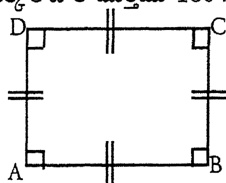


* రాంబస్ ఎదుటి కోణాలు సమానము. దాని ప్రక్క కోణాల మొత్తము 180^0.

(v) **చతురస్రం** (Square) :

ప్రక్క భుజాలు సమానంగా గల దీర్ఘ చతురస్రాన్ని "చతురస్రం" అంటారు.

(లేదా)



నాలుగు భుజాలు; నాలుగు కోణాలు సమానంగా గల చతుర్భుజాన్ని "చతురస్రం" అని అంటారు.

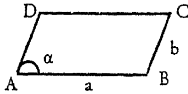
* ఒక రాంబస్‌లో ఒక కోణము లంబకోణము అయితే అది చతురస్రము అవుతుంది.
* చతురస్రములో
  - (i) అన్ని భుజాలు సమానము.
  - (ii) అన్ని కోణాలు సమానము.
  - (iii) కర్ణాలు సమానము. అవి పరస్పరం లంబసమద్విఖండన చేసుకొంటాయి.
  - (iv) ప్రతీ కర్ణము చతురస్రాన్ని రెండు సర్వసమాన సమద్విబాహు లంబకోణ త్రిభుజాలుగా విభజిస్తుంది.

క్రమ బహుభుజి (Regular Polygon) : ఒక బహుభుజిలోని అన్ని భుజాలు, అన్ని కోణాలు సమానంగా ఉంటే దానిని "క్రమబహుభుజి" అని అంటారు.

ఉదా : సమబాహు త్రిభుజము; చతురస్రం.

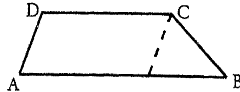
చతుర్భుజాల నిర్మాణము (Construction of Quadrilaterals) :

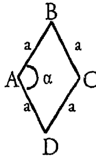
* చతుర్భుజాన్ని గీయడానికి అయిదు స్వతంత్ర కొలతలు కావాలి.



* ఒక సమాంతర చతుర్భుజమును గీసేందుకు మూడు స్వతంత్ర కొలతలు అవసరము.

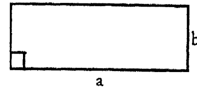
* ట్రెపిజీయమ్‌ను నిర్మించుటకు నాలుగు స్వతంత్ర కొలతలు అవసరము.

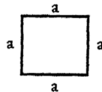




* రాంబస్‌ను గీసేందుకు రెండు స్వతంత్ర కొలతలు అవసరము.

* ఒక దీర్ఘ చతురస్రాన్ని నిర్మించేందుకు రెండు స్వతంత్ర కొలతలు చాలు.





* ఒక చతురస్రమును నిర్మించుటకు ఒక కొలత చాలును.

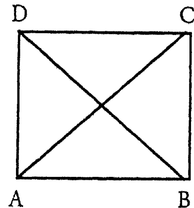
* ABCD చతుర్భుజములో AC; BD లు కర్ణాలు అయితే

(i) $AB + BC + CD > AD$

(ii) $AB + BC + CD + DA > 2AC$

(iii) $AB + BC + CD + DA > 2BD$

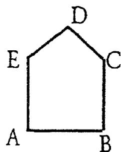
(iv) $AB + BC + CD + DA > AC + BD$ అగును.



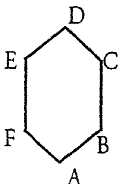
* * *

25. బహుభుజాలు
(Polygons)

బహుభుజి (Polygon) : అనేక భుజాలు గల సమతల సంవృత పటాన్ని "బహుభుజి" అని అంటారు.

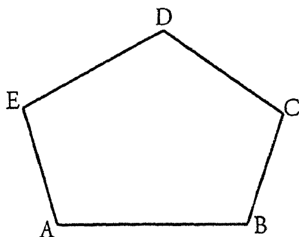


పంచభుజి (Pentagon) : అయిదు భుజాలు గల సమతల సంవృత పటాన్ని "పంచభుజి" అని అంటారు.

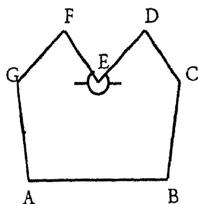


షడ్భుజి (Hexagon) : ఆరు భుజాలు గల సమతల సంవృత పటాన్ని "షడ్భుజి" అని అంటారు.

* ఏడు భుజాలు గల సమతల సంవృత పటాన్ని "సప్తభుజి" అని అంటారు.
* ఎనిమిది భుజాలు గల సమతల సంవృత పటాన్ని "అష్టభుజి" అని అంటారు.



కుంభాకార బహుభుజి (లేదా) ఉన్నతోదర బహుభుజి (Convex Polygon) : బహుభుజి యొక్క ప్రతి కోణము రెండు లంబకోణాలు (180^0) కంటె తక్కువగా ఉంటే అట్టి బహుభుజిని కుంభాకార బహుభుజి (లేక) ఉన్నతోదర బహుభుజి అంటారు.

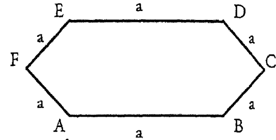


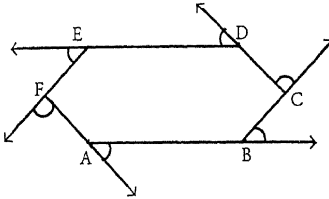
(పటంలో $\angle A$ =>180^0)

పుటాకార బహుభుజి (లేదా) నతోదర బహుభుజి (Concave Polygon) : ఒక బహుభుజిలో ఒక కోణము రెండు లంబకోణముల (180^0) కంటే హెచ్చుగా ఉంటే అట్టి బహుభుజిని "పుటాకార బహుభుజి" లేదా "నతోదర బహుభుజి" అని అంటారు.

క్రమ బహుభుజి (Regular Polygon) :

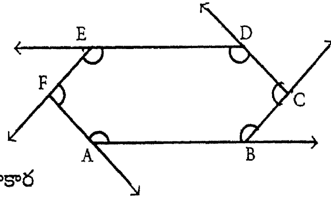
అన్ని భుజాలు సమాన పొడవులు గల బహుభుజిని "క్రమ బహుభుజి" అని అంటారు.





* ఒక కుంభాకార బహుభుజి యొక్క భుజములు వరుసగా పొడిగించుట వలన ఏర్పడు బాహ్యకోణముల మొత్తము నాలుగు లంబకోణములకు (360^0) సమానము.

* 'n' భుజములు కలిగి ఉన్న బహుభుజి యొక్క అంతరకోణాల మొత్తం + బాహ్యకోణాల మొత్తం=2n లంబకోణాలు



* 'n' భుజములు గల ఒక కుంభాకార బహుభుజి అంతర కోణాల మొత్తము = (2n- 4) లంబకోణాలు.

గమనిక :

(i) కుంభాకార బహుభుజి యొక్క అంతరకోణాల మొత్తము ఆ బహుభుజి యొక్క భుజాల సంఖ్యపై ఆధారపడి ఉండును.

(ii) కుంభాకార బహుభుజి యొక్క బాహ్యకోణాల మొత్తము ఆ బహుభుజి యొక్క భుజాల సంఖ్యపై ఆధారపడి ఉండదు.

* 'n' భుజములు గల క్రమబహుభుజి యొక్క ఒక్కొక్క అంతరకోణము = $\frac{2n-4}{n}$ లంబ కోణము

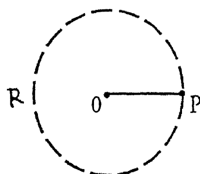
$$= \frac{2n-4}{n} \times 90^0$$

* 'n' భుజములు గల క్రమ బహుభుజి యొక్క ఒక్కొక్క బాహ్యకోణము = $\frac{4}{n}$ లంబ కోణము

$$= \frac{360^0}{n}.$$

* * *

26. వృత్తము
(Circle)



వృత్తము (Circle) : ఒక సమతలంలోని ఇవ్వబడిన ఒక బిందువు నుండి సమాన దూరంలో ఉన్న బిందువుల సమితిని "వృత్తం" అని అంటారు.

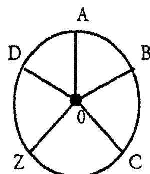
(లేదా)

స్థిర బిందువు నుండి సమాన దూరాలలో చలించు బిందువుల సముదాయాన్ని "వృత్తము" అని అంటారు.

స్థిర బిందువును వృత్త కేంద్రము అనియు; స్థిరదూరాన్ని వృత్త వ్యాసార్థము అనియు అంటారు.

* వృత్తం బిందువులు సమితి.
* వృత్తం ఒక సంవృత రేఖ.
* వృత్త పరిమాణాన్ని ఆ వృత్త వ్యాసార్థం నిర్ణయిస్తుంది.

వృత్త వ్యాసార్థము (Radius of a Circle) :
వృత్త కేంద్రాన్ని వృత్తంపై ఏదేని బిందువుతో కలిపే రేఖా ఖండాన్ని ఆ వృత్త వ్యాసార్థము అంటారు.



* వృత్తానికి అనంతమైన వ్యాసార్థాలు ఉంటాయి.
* వృత్త కేంద్రము, దాని వ్యాసార్థంచే వృత్తం నిర్ణయింపబడుతుంది.
* C (p, r) అనే సంకేతము P కేంద్రము; r వ్యాసార్థము గల వృత్తాన్ని సూచిస్తుంది.

వృత్తము దృష్ట్యా బిందువు స్థానము (Position of a Point with Respect to a Circle) : వృత్త కేంద్రము 'C' మరియు దాని వ్యాసార్థము 'r'.

(i) $CA > r$ అయితే A వృత్తం బయట ఉండును.

(ii) $CA < r$ అయితే A వృత్తం లోపల ఉండును.

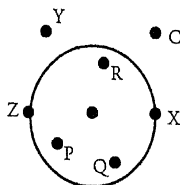
(iii) $CA = r$ అయితే A వృత్తం మీద ఉండును.

గమనిక : ఒక వృత్తం అది ఉండే సమతలాన్ని మూడు బిందు సమితులుగా విభజిస్తుంది.

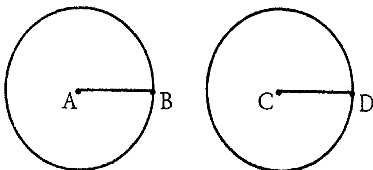
(i) వృత్త బాహ్య బిందువుల సమితి.

(ii) వృత్త బిందువుల సమితి (వృత్తంపైన బిందువుల సమితి)

(iii) వృత్త అంతర బిందువుల సమితి.



సర్వసమాన వృత్తాలు (Congruent Circles): రెండు వృత్తాల వ్యాసార్ధాలు సమానమైతే ఆ వృత్తాలను "సర్వసమాన వృత్తాలు" అంటారు.



వృత్తం జ్యా (Chord of a Circle) : వృత్తం పై గల ఏ రెండు బిందువులనైనా కలిపే రేఖా ఖండాన్ని ఆ వృత్తం "జ్యా" అంటారు.

వృత్త వ్యాసము (Diameter of a Circle) : వృత్త కేంద్రము గుండా పోయే జ్యాను, ఆ వృత్త వ్యాసము అంటాము.

* ఒక వృత్తము యొక్క ఏ వ్యాసము యొక్క మధ్య బిందువైన దాని "కేంద్రము" అవుతుంది.

* వృత్త కేంద్రము ద్వారా పోని ఏ జ్యా అయినా ఆ వృత్త వ్యాసము కంటే చిన్నది.

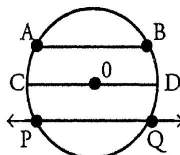
వృత్త ఛేదన రేఖ (Secant of a Circle) : వృత్తాన్ని రెండు బిందువుల వద్ద ఖండించే రేఖను ఆ వృత్త ఛేదన రేఖ అంటాము.

గమనిక : ప్రక్క పటంలో

$\overline{AB}$ ని జ్యా అనియు

$\overline{CD}$ ను వ్యాసము అనియు

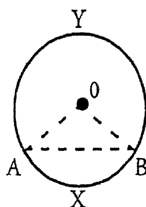
$\overleftrightarrow{PQ}$ ను ఛేదన రేఖ అని అంటారు.



* $\overline{PQ}$; $\overleftrightarrow{PQ}$ లో భాగం.
* వృత్తం జ్యాలన్నింటిలో వ్యాసము మిక్కిలి పొడవైన జ్యా.
* వృత్తానికి లెక్కలేనన్ని వ్యాసాలు ఉన్నాయి.
* ఒక వృత్త వ్యాసము, దాని వ్యాసార్ధానికి రెట్టింపు.

గమనిక : వృత్త వ్యాసార్థము = r ; వ్యాసము = d అనుకొనిన $d = 2r$ అగును.

వృత్త చాపము (Arc of a Circle) : ఒక భాగాన్ని ఆ వృత్త చాపము అంటారు.



* ఏ రెండు వృత్త బిందువులైనా రెండు చాపాలను నిర్ణయిస్తాయి.
* చాపాన్ని '$\frown$' చే సూచిస్తాము.

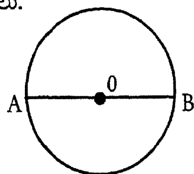
గమనిక : $\overset{\frown}{AB}$ ని 'చాపం AB' అని చదువుతాము.

* అర్థవృత్తం కంటె తక్కువైన చాపాన్ని "లఘుచాపం" అని అంటారు.
* అర్థవృత్తం కంటె ఎక్కువైన చాపాన్ని "గురుచాపం" అని అంటారు.

గమనిక : పై పటంలో $\overset{\frown}{AxB}$ అల్ప చాపాన్ని; $\overset{\frown}{AyB}$ అధిక చాపాన్ని సూచిస్తాయి.

* పై పటంలో $\overline{0A}$, $\overline{0B}$ లు వ్యాసార్థాలు. అవి $\angle A0B$ ని నిర్ణయిస్తాయి.
* $\overset{\frown}{AxB}$; $\overset{\frown}{AyB}$ లు జ్యా $\overline{AB}$ చే ఖండింపబడిన చాపాలు.

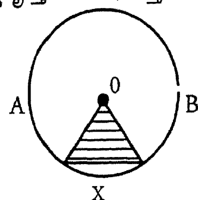
అర్థ వృత్తము (Semi Circle) : వృత్తంలో సరిగ్గా సగం ఉన్న చాపాన్ని "అర్థవృత్తము" అని అంటారు.



* వృత్తం యొక్క వ్యాసము ఏదైనను వృత్తాన్ని రెండు అర్థవృత్తాలుగా విభజిస్తుంది.

వృత్తము సెక్టర్ లేదా త్రిజ్యాంతరము

(Sector of a Circle) : $\overline{0A}$; $\overset{\frown}{AxB}$; $\overline{0B}$ బిందువుల సమ్మేళన సమితిని సెక్టర్ 0AB అంటాము.



* సెక్టరు పరిమాణాన్ని సెక్టరు కేంద్రం వద్ద దాని చాపము చేయు కోణము నిర్ణయిస్తుంది.

సెక్టారు భాగాలు (Parts of Sector) :

(i) **సెక్టార్ వ్యాసార్థము** (Radius of a Sector) : వృత్త వ్యాసార్థాన్నే సెక్టర్ వ్యాసార్థము అని అంటారు.

(ii) **సెక్టార్ కోణం** ($\angle A0B$) : రెండు వ్యాసార్థాల మధ్యనున్న చాపం కేంద్రం వద్ద చేయు కోణం. దీనినే "కేంద్రక కోణము" అని అంటాము.

(iii) **సెక్టార్ చాపము** (Arc of Sector) : రెండు వ్యాసార్ధాల చివరలను కలుపు వృత్త భాగమైన చాపాన్ని (వక్రరేఖ) సెక్టర్ చాపం అందురు.

* జ్యా వృత్తాన్ని రెండు ఖండాలుగా విభజిస్తుంది.

వృత్త పరిధి (Circumference of a Circle) : వృత్తం పొడవును వృత్త పరిధి అంటాము. దీనిని "C" తో సూచిస్తాము.

వృత్త పరిధికి; వృత్త వ్యాసానికి గల సంబంధము

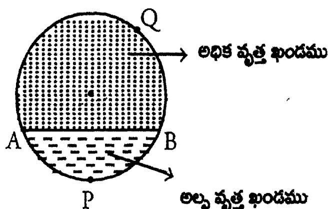
(Relation between Circumference and Diametre of a Circle):

$$\frac{\text{వృత్త పరిధి (c)}}{\text{వృత్త వ్యాసము (d)}} = \text{ఒక స్థిర సంఖ్య}$$

ఈ స్థిర సంఖ్యను 'π' తో సూచిస్తాము.

* π సుమారు విలువ $\frac{22}{7}$ (లేదా) 3.14
* $\frac{c}{d} = \pi$ (లేదా) $C = \pi \times d$ (లేదా) $C = 2\pi r$.
* π ఒక కరణీయ సంఖ్య.
* వృత్త పరిధి వ్యాసానికి π రెట్లు (లేదా) వ్యాసార్ధానికి 2π రెట్లు.
* ఒక క్రమ బహుభుజి భుజాల సంఖ్య అపరిమితంగా పెరిగినచో అది ఒక వృత్తం ఆకారాన్ని పొందుతుంది.

వృత్త ఖండము (Segment of a Circle) : ఒక వృత్తములో ఏదేని ఒక చాపము, ఆ చాపపు అంత్య బిందువులచే ఏర్పడు జ్యాచే సంవృతము చేయబడిన తలము యొక్క భాగాన్ని "వృత్త ఖండము" అంటారు.



* పై పటములో $\overline{AB}$ వృత్తాన్ని రెండు భాగాలుగా విభజిస్తుంది. ఆ రెండు భాగాలలో ప్రతి ఒక్కటి ఒక వృత్త ఖండము.
* వృత్తము యొక్క అల్పచాపాన్ని కలిగి ఉన్న వృత్త ఖండాన్ని "అల్పవృత్త ఖండము" అని; అధిక చాపాన్ని కలిగి ఉన్న వృత్త ఖండాన్ని "అధిక వృత్త ఖండము" అని అంటారు.

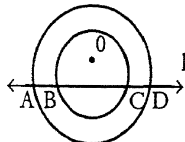
గమనిక :

(i) అధిక వృత్త ఖండములోని కోణము అల్పచాపముచే ఏర్పరచబడుతుంది.

(ii) అల్పవృత్త ఖండములోని కోణము అధికచాపముచే ఏర్పరచబడుతుంది.

* వృత్తకేంద్రము వద్ద ఏర్పడు కోణాల మొత్తము = 360^0

* "0" కేంద్రముగా గల రెండు ఏకకేంద్ర వృత్తాలను l రేఖ A, B, C, D ల వద్ద ఖండిస్తుంది. అయితే AB = CD అగును.

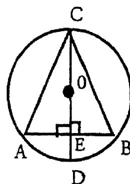


* వృత్తములో జ్యా యొక్క లంబసమద్విఖండన రేఖ దాని కేంద్రము ద్వారా పోతుంది.

* ఒక వృత్తములో కేంద్రానికి సమాన దూరంలో ఉన్న జ్యాలు సమానము.

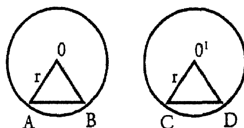
* వృత్త కేంద్రము నుండి జ్యాకు గీయబడిన లంబము, ఆ జ్యాకు సమద్విఖండన రేఖ అవుతుంది.

* "0" వృత్త కేంద్రము. $\overline{AB}$ ఒక జ్యా. $\overline{AB}$ కి లంబముగా ఉన్న వ్యాసము $\overline{CD}$; $\overline{AB}$ ని E వద్ద ఖండిస్తే ΔABC ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజము అగును.



* ఒక వృత్తములో రెండు జ్యాలు సమానాలైతే అవి కేంద్రము నుండి సమానదూరంలో ఉంటాయి.

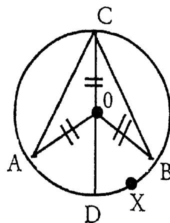
* ఒక వృత్తములో (లేక సమాన వృత్తాలలో) రెండు చాపాలు సమానమైన, వాటిచే ఖండింపబడే జ్యాలు సమానము. అనగా చాపము AB = చాపము CD అయితే జ్యా $\overline{AB}$ = జ్యా $\overline{CD}$.

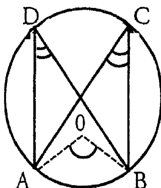


* ఒక వృత్తములో (లేక సమాన వృత్తాలలో) రెండు జ్యాలు సమానమైన; వాటిచే ఖండింపబడే చాపాలు సమానము.

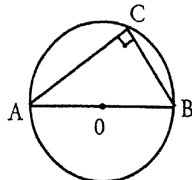
అనగా జ్యా $\overline{AB}$ = జ్యా $\overline{CD}$ అయితే చాపము AB = చాపము CD అగును.

* ఒక వృత్తములో ఒక చాపము కేంద్రము వద్ద ఏర్పరచు కోణము, అది మిగిలిన వృత్తముపై ఏదేని ఒక బిందువు వద్ద చేయు కోణానికి రెట్టింపు. ప్రక్క పటంలో $\angle A0B = 2\angle ACB$.





* ఒకే వృత్త ఖండములోని కోణాలు సమానము. అనగా $\angle C = \angle D$.

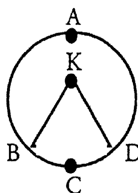


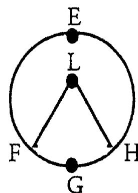
* అర్ధవృత్తంలోని కోణము లంబకోణము అనగా $\angle C = 90^0$.

* ఒక వృత్తములో అల్పచాపము మిగిలిన వృత్తముపై ఏదేని ఒక బిందువు వద్ద ఏర్పరచు కోణము అల్పకోణము; అధిక చాపము మిగిలిన వృత్తముపై ఏదేని ఒక బిందువు వద్ద ఏర్పరచు కోణము అధిక కోణము.

* ఒక వృత్తములో ఒక చాపరేఖ మిగిలిన వృత్తముపై ఏదేని ఒక బిందువు వద్ద లంబకోణమును ఏర్పరచిన ఆ చాపము అర్ధవృత్తము.

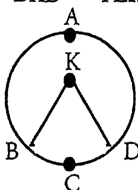
* రెండు సమాన వృత్తాలలో (లేక ఒకే వృత్తంలో) రెండు చాపాలు వాటి అనురూప కేంద్రాల (లేక కేంద్రము) వద్ద ఏర్పరచు కోణాలు సమానమైన, ఆ చాపాలు సమానము.

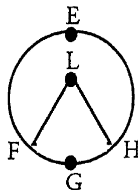




వివరణ : $\angle BKD = \angle FLH$ అయితే $\overset{\frown}{BKD} = \overset{\frown}{FLH}$ అగును.

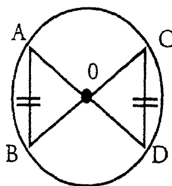
* రెండు సమాన వృత్తాలలో రెండు చాపాలు సమానమైన, అవి వాటి అనురూప కేంద్రాల వద్ద ఏర్పరచు కోణాలు సమానము.





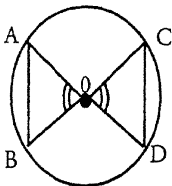
వివరణ : $\overset{\frown}{BCD} = \overset{\frown}{FGH}$ అయితే $\overset{\frown}{BKD} = \overset{\frown}{FLH}$ అగును.

* ఒక వృత్తములో (లేక సమాన వృత్తాలలో) రెండు జ్యాలు సమానమైన అవి కేంద్రము (లేక అనురూప కేంద్రాల) వద్ద ఏర్పరచు కోణాలు సమానము.



వివరణ : "0" కేంద్రముగా గల వృత్తములో AB = CD అయితే $\angle A0B = \angle C0D$.

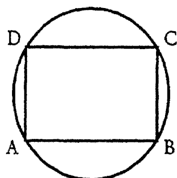
* ఒక వృత్తములో (లేక సమాన వృత్తాలలో) రెండు జ్యాలు వృత్త కేంద్రము (లేక అనురూప కేంద్రాలు) వద్ద ఏర్పరచు కోణాలు సమానమైన ఆ జ్యాలు సమానం.



వివరణ : $\angle A0B = \angle C0D$ అయితే AB = CD అగును.

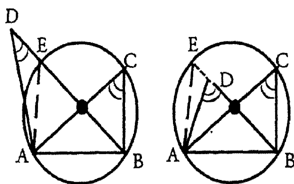
* అర్ధవృత్తము కేంద్రము వద్ద చేయు కోణము = 180^0.

చక్రీయ చతుర్భుజము (Cyclic Quadrilateral) :
ఒక చతుర్భుజపు అన్ని శీర్షాలు ఒకే వృత్తముపై ఉంటే, ఆ చతుర్భుజాన్ని "చక్రీయ చతుర్భుజము" అంటారు.



* ఒకే వృత్తము మీద వున్న బిందువులను చక్రీయాలంటారు.

* రెండు బిందువులను కలిపే రేఖా ఖండము దానిని (ఆ రేఖా ఖండాన్ని) కలిగి ఉన్న రేఖకు ఒకే వైపు గల రెండు బిందువుల వద్ద సమాన కోణాలు ఏర్పరిస్తే ఆ నాలుగు బిందువులు చక్రీయాలు.



వివరణ : A, B లు రెండు బిందువులు.

C, D లు $\overleftrightarrow{AB}$ కి ఒకే వైపున గల రెండు బిందువులు.

$\angle ACB = \angle ADB$ అయితే A, B, C, D లు చక్రీయాలు అవుతాయి.

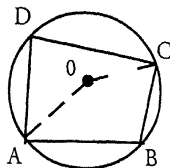
* చక్రీయ చతుర్భుజములో అభిముఖ కోణాల మొత్తము = 180^0.

వివరణ : ABCD చక్రీయ చతుర్భుజము.

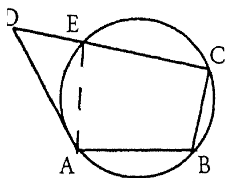
0 వృత్త కేంద్రము అయితే

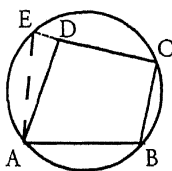
$\angle D + \angle B = 180^0$

అనగా చక్రీయ చతుర్భుజమందు అభిముఖ కోణాలు సంపూరకాలు.



* ఒక చతుర్భుజపు ఏ జత అభిముఖ కోణాల మొత్తమైనా 180^0 లకు సమానము అయితే అది చక్రీయ చతుర్భుజము అగును.

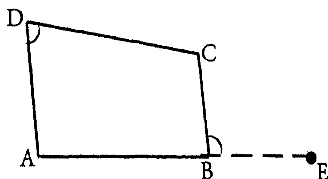




వివరణ : ABCD చతుర్భుజము

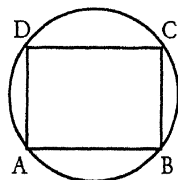
$\angle ABC + \angle ADC = 180^0$ అయితే, ABCD చక్రీయ చతుర్భుజము.

* చక్రీయ చతుర్భుజపు ఒక భుజాన్ని పొడిగించగా ఏర్పడు బాహ్యాకోణము దాని అంతరాభిముఖ కోణానికి సమానము.



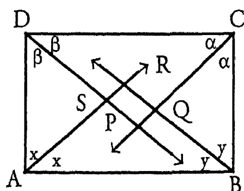
వివరణ : ABCD చక్రీయ చతుర్భుజము $\overline{AB}$, E వరకు పొడిగింపబడింది. అప్పుడు $\angle CBE = \angle D$ అగును.

* ఒక సమాంతర చతుర్భుజము చక్రీయమైతే, అది దీర్ఘ చతురస్రము అగును.



వివరణ : ABCD చక్రీయ సమాంతర చతుర్భుజము అయితే ABCD దీర్ఘ చతురస్రము అగును.

* ఒక చతుర్భుజపు కోణ సమద్విఖండన రేఖలచే ఏర్పడే చతుర్భుజము చక్రీయ చతుర్భుజము అగును.



బ్రహ్మగుప్తుని సిద్ధాంతము (Brahmagupta's Theorem) : కర్ణాలు ఒకదాని కొకటి లంబముగా గల చక్రీయ చతుర్భుజములో కర్ణాల ఖండన బిందువు నుండి ఏదేని భుజానికి గీయబడిన లంబరేఖ, ఆ భుజపు ఎదుటి భుజాన్ని సమద్విఖండన చేస్తుంది.

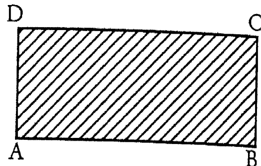
* ఒక వృత్తములో రెండు అసమాంతర జ్యాల యొక్క లంబసమద్విఖండన రేఖలు ఆ వృత్త కేంద్రము వద్ద ఖండించుకుంటాయి.

* ఒక తలములో గల సరేఖీయాలు కాని మూడు బిందువుల ద్వారా పోయే వృత్తము ఒకే ఒకటి ఉంటుంది.

* * *

27. వైశాల్యాలు
(Areas)

దీర్ఘచతురస్ర ప్రాంతము (Region of a Rectangle) : దీర్ఘ చతురస్రం; దీర్ఘ చతురస్ర అంతరాల సమ్మేళనాన్ని "దీర్ఘచతురస్ర ప్రాంతం" అని అంటారు.

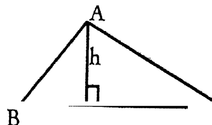


దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యము (Area of Rectangle) : దీర్ఘ చతురస్ర ప్రాంతం ఎంత ఉందో తెలుపు కొలతను "దీర్ఘ చతురస్ర ప్రాంత వైశాల్యము" లేదా "దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యము" అని అంటారు.

* దీర్ఘ చతురస్రము యొక్క పొడవు; వెడల్పు మరియు వైశాల్యము వరుసగా l, b, A అయితే $A = l \times b$ చదరపు యూనిట్లు అగును. మరియు దీర్ఘచతురస్ర చుట్టుకొలత $= 2(l+b)$ యూనిట్లు.
* వైశాల్యాలను కొలవడానికి ఒక యూనిట్ భుజం కల చతురస్ర వైశాల్యాన్ని యూనిట్ (ప్రామాణిక వైశాల్యం) గా తీసుకొంటాం.
* 1 సెం.మీ. భుజం కల చతురస్ర వైశాల్యాన్ని ఒక చదరపు సెం.మీ. అంటాము.
* 1 మీటరు భుజం కల చతురస్ర వైశాల్యము = 1 చదరపు మీటరు.
* త్రిభుజ వైశాల్యము $= \frac{1}{2}bh$

  ఇచ్చట 'b' భూమి మరియు

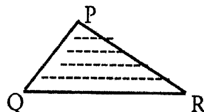
  'h' భూమిపై ఎత్తు.



* 'a' భుజం పొడవు గల చతురస్ర వైశాల్యము $= a^2$ చ.యూ.

  మరియు చతురస్ర చుట్టుకొలత $= 4a$ యూ.
* a, b, c లు భుజాలుగా గల త్రిభుజం చుట్టుకొలత $= (a+b+c)$ యూ.
* త్రిభుజ అంతరము త్రిభుజాన్ని కలిగి ఉండదు.

త్రిభుజ ప్రాంతము (Region of a Triangle) : ఒక త్రిభుజము దాని అంతరాల సమ్మేళనాన్ని "త్రిభుజ ప్రాంతము" అంటారు.



గమనిక : వైశాల్యము ప్రాంతాన్ని సూచిస్తుంది. కావున త్రిభుజ వైశాల్యం అనగా త్రిభుజ ప్రాంత వైశాల్యము.

* ఒక బహుభుజి దాని అంతరముల సమ్మేళనాన్ని బహుభుజి ప్రాంతము అని అంటారు.

* బహుభుజి భుజాలు రేఖా ఖండాలు. ప్రతి రేఖా ఖండానికి పొడవు ఉంటుంది.

గమనిక : ప్రతి రేఖా ఖండానికి అనుగుణంగా, ఒకే ఒక ధనవాస్తవ సంఖ్య ఉంటుంది. దానిని ఆ "రేఖా ఖండపు పొడవు" అంటారు.

$\overline{AB}$ యొక్క పొడవును $l(\overline{AB})$ చే గాని లేక AB చే గాని సూచిస్తారు.

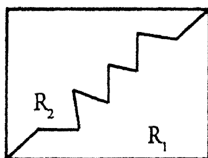
* ప్రతి బహుభుజ ప్రాంతానికి కొంత వైశాల్యము ఉంటుంది.

* R అనే ఒక బహుభుజి ప్రాంతవైశాల్యాన్ని "ar(R)" చే సూచిస్తాం.

* సర్వసమాన త్రిభుజాల వైశాల్యాలు సమానము.

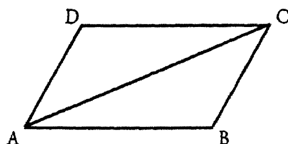
* $R_1 \subseteq R_2$ అయ్యేటట్లు, R_1, R_2 లు రెండు బహుభుజి ప్రాంతాలైతే $ar(R_1) \leq ar(R_2)$ అగును.

దీనినే "వైశాల్యాల ఏకదిష్ట స్వీకృతము" (Area Monotone Axiom) అంటారు.



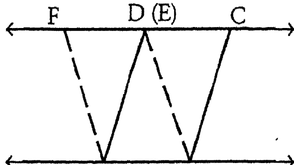
వైశాల్యాల సమ్మేళన స్వీకృతము (Area Addition Axiom) : R_1, R_2 అనే బహుభుజి ప్రాంతాల ఛేదనము ఒక రేఖా ఖండము గాని లేక ఏకబిందు సమితి గాని అవుతూ, $R_1 \cup R_2 = R$ అయితే,

$ar(R) = ar(R_1)+ar(R_2)$ అగును.



* సమాంతర చతుర్భుజాన్ని దాని కర్ణము వైశాల్యాలు సమానముగా గల రెండు త్రిభుజాలుగా విభజిస్తుంది.

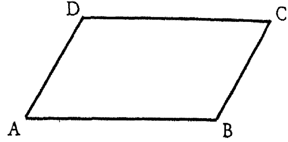
అనగా ar (DABC) = ar (DCDA)



* ఒకే భూమి కలిగి ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్య ఉండే సమాంతర చతుర్భుజాల వైశాల్యాలు సమానము.

అనగా ar($||^{gm}$ ABCD) = ar($||^{gm}$ ABEF)

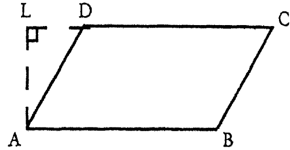
* సమాంతర చతుర్భుజపు ఏ భుజాన్నైనా దాని "భూమి" అంటారు.



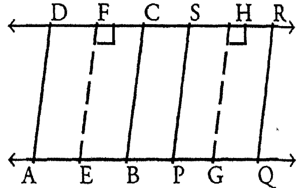
గమనిక : $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ లలో దేనినైనా $||^{gm}$ ABCD యొక్క భూమిగా తీసుకోవచ్చు.

ఉన్నతి (Altitude) : సమాంతర చతుర్భుజపు ప్రతి ఒక భూమికి, ఆ భుజముపై గల బిందువు నుండి ఎదుటి భుజాన్ని కలిగి ఉన్న రేఖకు లంబముగా గీయబడిన రేఖా ఖండాన్ని (ఆ భూమికి) అనురూప ఉన్నతి అంటారు.

* సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యము దాని ఏదైనా ఒక భూమి; దాని అనురూప ఉన్నతి యొక్క లబ్ధానికి సమానము. అనగా సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యము =bh (b - భూమి; h - అనురూప ఉన్నతి.)

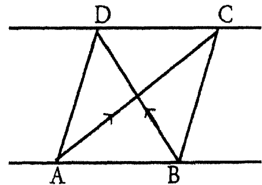


* సమాన భూములు కలిగి, ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్య ఉన్న సమాంతర చతుర్భుజాల వైశాల్యాలు సమానము.

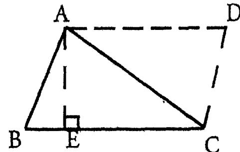


అనగా ar($||^{gm}$ ABCD) = ar($||^{gm}$ PQRS)

* ఒకే భూమిని కలిగి ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్య గల త్రిభుజాల వైశాల్యాలు సమానము.
అనగా ar(DABD) = ar(DABC)

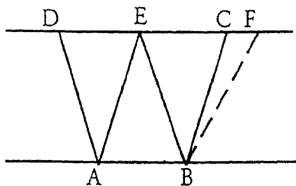


* త్రిభుజ వైశాల్యము దాని ఏదైనా ఒక భుజము; ఆ భుజానికి చెందిన ఉన్నతి యొక్క లబ్ధములో సగము.



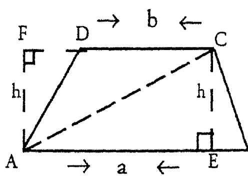
గమనిక : భూమి 'b'; అనురూప ఉన్నతి "h" గా గల త్రిభుజ వైశాల్యము $\Delta = \frac{1}{2}bh$.

* ఒకే భూమి కలిగి, ఒకే సమాంతర రేఖల మధ్య ఒక త్రిభుజము, ఒక సమాంతర చతుర్భుజము ఉన్న త్రిభుజ వైశాల్యము, సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యంలో సగము.

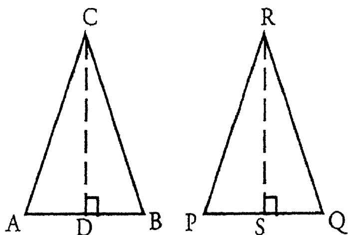


అనగా $ar(\Delta ABE) = \frac{1}{2}ar(||^{gm} ABCD)$

* సమలంబ చతుర్భుజ వైశాల్యము దాని సమాంతర భుజాల మొత్తము మరియు దాని (ఉన్నతి) సమాంతర భుజాల మధ్య దూరము యొక్క లబ్ధములో సగము.
అనగా వైశాల్యము = $\frac{1}{2}h(a+b)$.

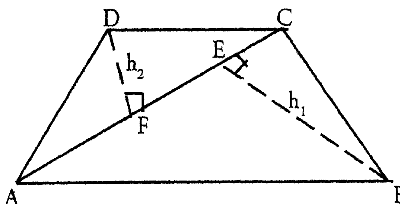


* సమాన వైశాల్యాలు గల రెండు త్రిభుజాలలో ఒక దాని ఒక భుజము రెండవ దాని ఒక భుజానికి సమానమైన, ఆ త్రిభుజాల అనురూప ఉన్నతులు సమానము.



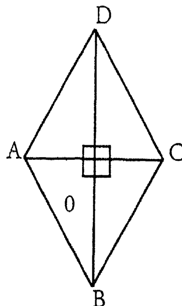
అనగా ΔABC ; ΔPQR లలో $ar(\Delta ABC) = ar(\Delta PQR)$ మరియు $AB = PQ$ అయితే $CD = RS$ అగును.

* ABCD చతుర్భుజములో $\overline{AC}$ కర్ణము; $AC = d$; $\overline{BE}$, $\overline{DF}$ లను



$\overline{AC}$ కి లంబముగా
గీస్తే $BE = h_1$;
$DF = h_2$ అనుకొనిన
□ ABCD వైశాల్యము $= \frac{1}{2}d\,(h_1+h_2)$
(ఇచ్చట $\overline{DF}$, $\overline{BE}$ లను అంతర లంబాలు అంటారు.)

అనగా చతుర్భుజ వైశాల్యము దాని ఒక కర్ణము, ఆ కర్ణం పైకి గీయబడిన అంతర లంబాల మొత్తము యొక్క లబ్ధములో సగము.



* d_1, d_2లు కర్ణాలుగా గల సమబాహు చతుర్భుజ వైశాల్యము $= \frac{d_1 d_2}{2}$ అగును.

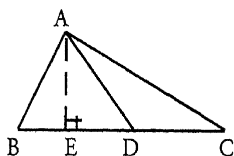
గమనిక :

(i) ఏదైనా ఒక చతుర్భుజపు కర్ణాలు d_1, d_2లు ఒకదాని కొకటి లంబాలైతే ఆ చతుర్భుజ వైశాల్యము $= \frac{1}{2}d_1 d_2$

(ii) చతురస్ర కర్ణాలు సమానము, అవి ఒక దాని కొకటి లంబసమద్విఖండన చేసుకొంటాయి.

'd' కర్ణముగా గల చతురస్ర వైశాల్యము $= \frac{1}{2}d^2$.

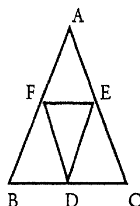
* ఒక త్రిభుజాన్ని దాని మధ్యగత సమాన వైశాల్యాలు గల రెండు త్రిభుజాలుగా విభజిస్తుంది.
అనగా $ar(\Delta ABC) = ar(\Delta ADC)$



* ΔABC లో D, E, F లు వరుసగా $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ ల మధ్య బిందువులు అయితే,

(i) BDEF సమాంతర చతుర్భుజము

(ii) $ar(\Delta DEF) = \frac{1}{4}ar(\Delta ABC)$

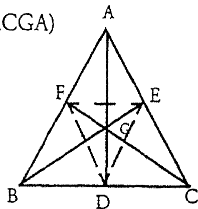


(iii) ar($\|^{gm}$BDEF) = $\frac{1}{2}$ar(ΔABC) అగును.

* ΔABC యొక్క మధ్యగత మిళిత బిందువు 'G' అయితే

ar(ΔAGB) = $\frac{1}{3}$ar(ΔABC)

మరియు ar(ΔAGB) = ar(ΔBGC) = ar(ΔCGA)



ఇదే విధంగా ar(ΔBCE) = ar(ΔBCF)

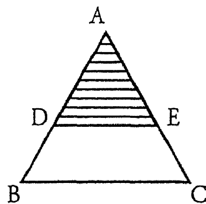
ar(ΔGAF) = ar(ΔGDC)

ar(ΔGEC) = ar(ΔGFB)

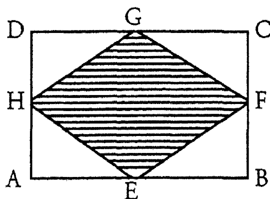
* సమాంతర చతుర్భుజపు ఒక జత అభిముఖ భుజాల మధ్య బిందువులను కలిపే రేఖా ఖండము ఆ సమాంతర చతుర్భుజాన్ని సమాన వైశాల్యాలు గల రెండు సమాంతర చతుర్భుజాలుగా విభజిస్తుంది.

* సమాంతర చతుర్భుజాన్ని దాని కర్ణాలు వైశాల్యాలు సమానముగా గల నాలుగు త్రిభుజాలుగా విభజిస్తాయి.

* ΔABC లో D, E లు వరుసగా $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ ల మధ్య బిందువులు అయితే ar(ΔADE) = $\frac{1}{4}$ar(ΔABC)



* ఒక చతుర్భుజపు మధ్య బిందువులను వరుసగా కలిపిన ఏర్పడు సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యము ఆ చతుర్భుజ వైశాల్యములో సగము ఉండును.



* * *

28. సరళ రేఖలు
(Straight Lines)

మౌళిక స్వీకృతాలు (Basic Axioms) :

* ఒక తలములో రెండు బిందువు లిచ్చినచో వాటిని కలిగి వుంటూ ఒకే ఒక సరళరేఖ ఉంటుంది.
* రెండు వేరు వేరు రేఖలు ఒకటి కంటె ఎక్కువ ఉమ్మడి బిందువులను కలిగి ఉండలేవు.

గమనిక :

(i) రెండు సరళరేఖలు ఒక ఉమ్మడి బిందువు మాత్రమే కలిగి ఉంటే అవి ఖండన రేఖలు అవుతాయి.

(ii) రెండు సరళరేఖలు ఉమ్మడి బిందువును కలిగి లేకపోతే అవి సమాంతర రేఖలు అవుతాయి.

సమాంతర రేఖలు (Parallel Lines) : రెండు ఏకతల రేఖలు ఖండించుకొననిచో అవి సమాంతర రేఖలు అనబడతాయి.

యూక్లిడ్ సమాంతర స్వీకృతము (లేదా) ప్లే ఫెయిర్ స్వీకృతం (Play fair Axiom): "ఒక దత్త సరళరేఖలో లేనట్టి ఒక దత్త బిందువు గుండా ఆ సరళరేఖకు ఒకే ఒక సమాంతర రేఖ గీయగలము."

వివరణ : 'l' ఒక దత్త సరళరేఖ, 'p' దానిపై లేనట్టి ఒక దత్త బిందువు అయినచో p గుండా l కు సమాంతరముగా ఒకే ఒక సరళరేఖను గీయగలము.

తిర్యగ్రేఖ : ఒక సరళరేఖల జతను రెండు వేర్వేరు బిందువులలో ఖండించే సరళరేఖను "తిర్యగ్రేఖ" అని అంటారు.

సదృశ కోణాలు (Corresponding Angles) : రెండు కోణాలు

(a) తిర్యగ్రేఖకు ఒకేవైపు ఉండి.

(b) ఒకటి అంతర కోణము; రెండవది బాహ్యాకోణము అయి ఉండి

(c) అవి ఆసన్న కోణములు కానిచో అట్టి కోణాల జతను "సదృశ కోణాలు" అని అంటారు.

ఏకాంతర కోణాలు (Alternate Angles) : రెండు కోణాలు

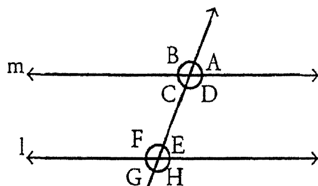
(a) రెండును అంతరకోణాలు అయి

(b) అవి తిర్యగ్రేఖకు చెరోవైపునా ఉండి

(c) అవి ఆసన్న కోణాలు కానిచో అట్టి కోణాల జతను "ఏకాంతర కోణాలు" అని అంటారు.

సదృశ కోణాల స్వీకృతం (Axiom of Corresponding Angles) :

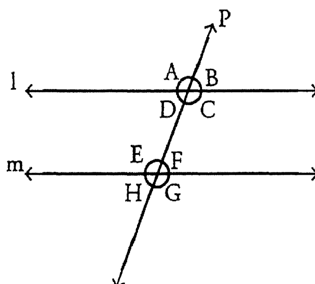
* (i) "రెండు ఏకతల సమాంతర రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండింపగా ఏర్పడు సదృశకోణాలు సమానము."



అనగా ప్రక్కపటంలో $\angle A = \angle E$; $\angle D = \angle H$

$\angle B = \angle F$; $\angle C = \angle G$

* (ii) రెండు సమాంతర రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండింపగా; అప్పుడు ఏకాంతర కోణాలు సమానము.



అనగా పై పటంలో $\angle C = \angle E$; $\angle D = \angle F$

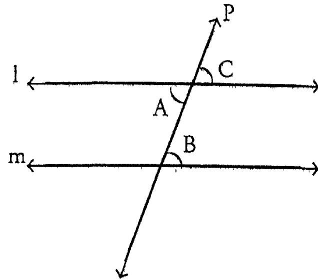
* (iii) ఒక సమాంతర రేఖల జతను, ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండిపంగా, తిర్యగ్రేఖకు ఒకే వైపునున్న అంతరకోణాలు సంపూరకాలు.

అనగా పై పటము నుండి $\angle C + \angle F = 180^0$

$\angle D + \angle E = 180^0$.

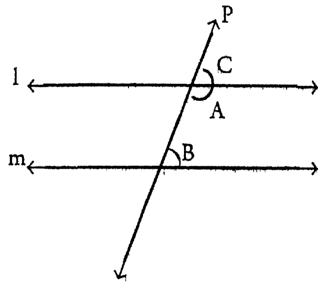
స్వీకృతము (Axiom) : "రెండు ఏకతల రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండింపగా ఏర్పడిన సదృశ కోణములలో ఒక జత సమానమయిన, అప్పుడు ఆ రెండు సరళరేఖలు సమాంతరములు" అవుతాయి.

* (i) రెండు ఏకతల రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండింపగా ఏర్పడిన ఏకాంతర కోణములలో ఒక జత సమానమయిన, ఆ రెండు సరళరేఖలు సమాంతరములు అగును.



అనగా పై పటములో $\angle B = \angle C$ అయితే $l \| m$.

* (ii) రెండు ఏకతల రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ, దానికి ఒకే వైపున ఒక అంతరకోణముల జత సంపూరకములగునట్లు ఖండించినచో అప్పుడు ఆ రెండు సరళరేఖలు సమాంతరములు అగును.

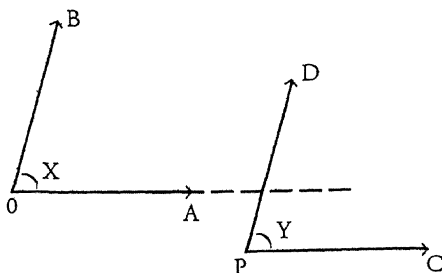


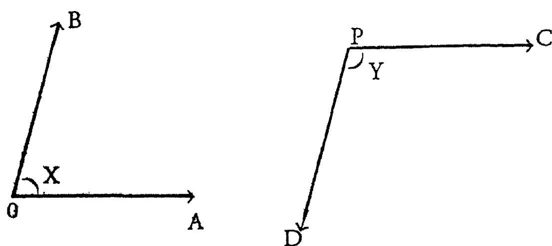
అనగా పై పటములో $\angle A + \angle B = 180^0$ అయితే $l \| m$.

* "ఒక కోణము యొక్క భుజములకు సమాంతరముగా మరియొక కోణము యొక్క భుజములు ఉన్నచో, అప్పుడు ఆ రెండు కోణములు సమానములు గాని లేక సంపూరకములుగాని అగును.

అనగా క్రిందిపటం నుండి $\angle X = \angle Y$ (లేదా)

$$\angle X + \angle Y = 180^0.$$


B
D
X
0
A
Y
P
C


B
P
C
Y
X
0
A
D

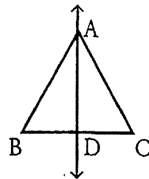
* * *

29. సౌష్ఠవము
(Symmetry)

సౌష్ఠవము (Symmetry) : వస్తువుల ఆకారానికి అందం తెచ్చే సమత్వపు లేక క్రమత్వపు లక్షణాన్ని "సౌష్ఠవము" అని అంటారు.

* ఒక రేఖకు ఇరువైపుల సర్వసమానంగా ఉన్నట్టి పటాన్ని సౌష్ఠవము కలిగి ఉంది అని అంటారు.

ఆ పటము ఏ రేఖపై సౌష్ఠవము కలిగి ఉందో ఆ రేఖను "సౌష్ఠవ రేఖ" లేక "సౌష్ఠవాక్షము" అని అంటారు.



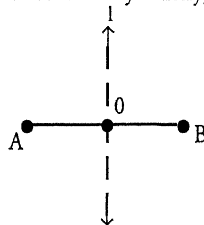
ప్రతిబింబ సౌష్ఠవము (Line Symmetry): సౌష్ఠవ రేఖకు ఒకవైపునున్న పట భాగము రెండవవైపున్న దాని ప్రతిబింబముతో ఏకీభవిస్తే దానిని "ప్రతిబింబ సౌష్ఠవము" అని అంటారు.

రేఖా సౌష్ఠవము (Linear Symmetry) : ఒక పటంలో పరస్పరం సరిగా ఏకీభవించే రెండు భాగాలుగా విభజించే రేఖ కనీసము ఒకటైనా ఉన్నచో, ఆ పటము రేఖా సౌష్ఠవము కలిగి ఉందని అంటారు.

రేఖా సౌష్ఠవమునకు ఉదాహరణలు మరియు సౌష్ఠవ అక్షాల సంఖ్య
(Examples of Liner Symmetry and the Number of Axes of Symmetry) :

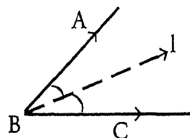
ఉదా 1 :

ఒక రేఖా ఖండము దాని లంబసమద్విఖండన రేఖపై సౌష్ఠవము కలిగి ఉంటుంది.



ఉదా 2 :

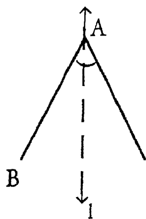
ఒక కోణము దాని సమద్విఖండన రేఖపై సౌష్ఠవము కలిగి ఉంటుంది. ఇచ్చట l సౌష్ఠవ అక్షము.



ఉదా 3 :

ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజము, సమాన భుజాల మధ్య కోణ సమద్విఖండన రేఖపై సౌష్ఠవము కలిగి ఉంటుంది.

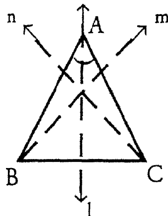
ఇచ్చట l సౌష్ఠవ అక్షము.



ఉదా 4 :

ఒక సమబాహు త్రిభుజము, దాని ప్రతీ కోణ సమద్విఖండన రేఖపైన సౌష్ఠవము కలిగి ఉంటుంది.

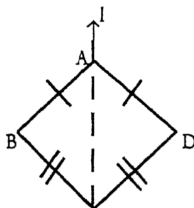
ఇచ్చట l, m, n లను సౌష్ఠవ అక్షాలు అని అంటారు.



* ఒక సమబాహు త్రిభుజము మూడు సౌష్ఠవ అక్షాలను కలిగి ఉంటుంది.

ఉదా 5 :

ఒక గాలిపటాకారములో నున్న పటం ఒక సౌష్ఠవ అక్షమును కలిగి ఉంటుంది. ఇచ్చట 'l' ఒకే ఒక సౌష్ఠవాక్షము.

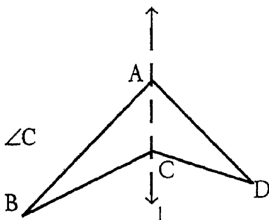


ఉదా 6 :

ఒక బాణతల (Arrow head) ఆకారములో నున్న పటము ఒక సౌష్ఠవాక్షము కలిగి ఉంటుంది.

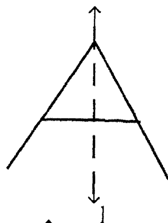
'l' ఒకే ఒక సౌష్ఠవాక్షము.

ఇచ్చట AB = AD; BC = CD. $\angle A$, $\angle C$ ల సమద్విఖండన రేఖ 'l'.



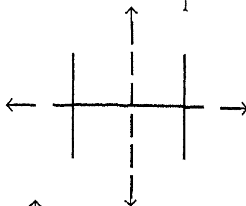
ఉదా 7 :

అక్షరం 'A' ఒక సౌష్ఠవాక్షము కలిగి ఉంటుంది.



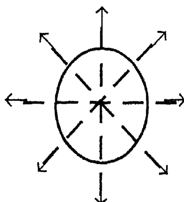
ఉదా 8 :

H అను అక్షరము రెండు సౌష్ఠవాక్షములను కలిగి ఉంటుంది.



ఉదా 9 :

ఒక వృత్తము అనంత సౌష్ఠవ అక్షాలను కలిగి ఉంటుంది.



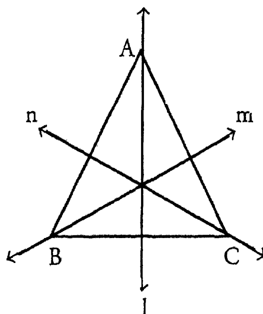
* ఒక పటం యొక్క సౌష్ఠవ అక్షము ఆ పటాన్ని రెండు సర్వసమాన భాగాలుగా విభజిస్తుంది.

* ప్రతి పటానికి సౌష్ఠవ అక్షము ఉండవలసిన అవసరంలేదు.

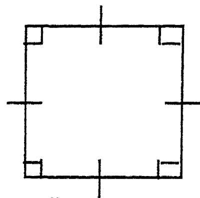
* ప్రతి పటం రేఖా సౌష్ఠవం కలిగి ఉండవలసిన అవసరంలేదు.

అసౌష్ఠవ పటాలు (Unsymmetric Figures) : సౌష్ఠవాక్షము లేని పటాలను "అసౌష్ఠవ పటాలు" అంటారు.

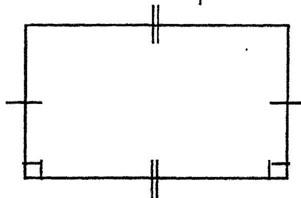
* ఒక పటం ఒకటి కంటె ఎక్కువ సౌష్ఠవ రేఖలను కలిగి ఉండవచ్చు.



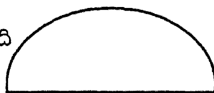
* చతురస్రము ఒక సౌష్ఠవ పటము.
దీనికి నాలుగు సౌష్ఠవాక్షాలు కలవు. అవి
2 కర్ణములు మరియు 2 జతల ఎదుటి
భుజముల యొక్క లంబసమద్విఖండన
రేఖలు.



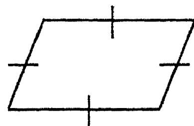
* దీర్ఘ చతురస్రము ఒక సౌష్ఠవ
పటము. దీనికి 2 సౌష్ఠవాక్షములు
కలవు. అవి 2 జతల ఎదుటి
భుజములయొక్క లంబ
సమద్విఖండన రేఖలు.



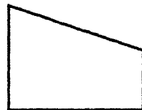
* అర్థవృత్తము ఒక సౌష్ఠవ పటము.
దీనికి 1 సౌష్ఠవ అక్షము కలదు. అది
వ్యాసము యొక్క లంబ
సమద్విఖండన రేఖ.



* సమ చతుర్భుజము ఒక సౌష్ఠవ
పటము. దీనికి 2 సౌష్ఠవాక్షములు
కలవు. అవి 2 కర్ణములు.



* చతుర్భుజం సౌష్ఠవ పటం కాదు.



* సమద్విబాహు సమలంబ
చతుర్భుజం ఒక సౌష్ఠవ పటము.
దీనికి 1 సౌష్ఠవ అక్షము కలదు.
అది సమాంతర భుజముల
లంబసమద్విఖండన రేఖ.



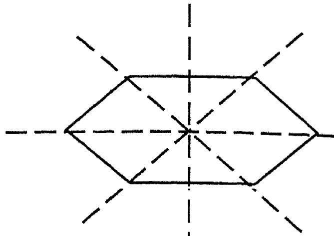
* M సౌష్ఠవ పటము. సౌష్ఠవ అక్షాల సంఖ్య = 1.

* F అక్షరం సౌష్ఠవం కాదు.

* క్రమ షడ్భుజికి ఆరు సౌష్ఠవ అక్షాలు కలవు.

3 జతల ఎదుటి భుజముల లంబ సమద్విఖండన రేఖలు.

3 జతల ఎదుటి కోణముల సమద్విఖండన రేఖలు.



గమనిక : 'n' భుజాలు గల క్రమ బహుభుజికి 'n' సౌష్ఠవాక్షములు ఉంటాయి.

* రేఖకు అనంత సౌష్ఠవాక్షములు ఉంటాయి. (రేఖపై ప్రతి బిందువు వద్ద గీసిన లంబము సౌష్ఠవాక్షము అగును.)



గమనిక : విషమబాహు త్రిభుజానికి సౌష్ఠవ రేఖలు లేవు.

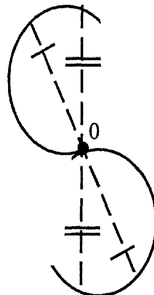
బిందు సౌష్ఠవము (Point Symmetry) : ఒక పటంలో ఏదైనా ఒక బిందువు గుండా ఆ పటం యొక్క సరిహద్దులను తాకుతూ గీసిన ప్రతీ రేఖా ఖండాలు బిందువు వద్ద సమద్విఖండనమైతే గాని

(లేదా)

ఆ పటాన్ని ఆ బిందువుపై 180^0 భ్రమణం చేయగా అది ఎట్టి మార్పు చెందకున్నా గాని ఆ పటం ఆ బిందువుపై "బిందు సౌష్ఠవము" కలిగి ఉందని అంటాము.

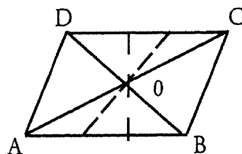
ఉదా 1 :

S పటము '0' బిందువుపై "బిందు సౌష్ఠవము" కలిగి ఉంటుంది.



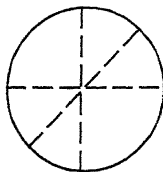
ఉదా 2 :

ఒక సమాంతర చతుర్భుజం కర్ణాల ఖండన బిందువు అగు '0' పై బిందు సౌష్ఠవము కలిగి ఉంటుంది.



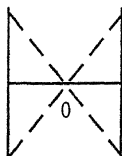
ఉదా 3 :

ఒక వృత్తము దాని కేంద్రముపై బిందు సౌష్ఠవమును కలిగి ఉంటుంది. వృత్త కేంద్రాన్ని "సౌష్ఠవ కేంద్రము" అంటారు.

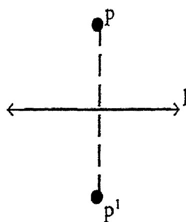


ఉదా 4 :

'H' అను అక్షరం ఒక బిందువులో బిందు సౌష్ఠవము కలిగి ఉంటుంది.

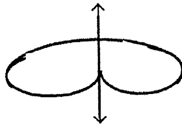
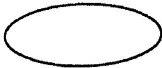
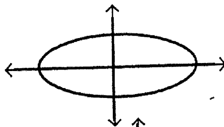
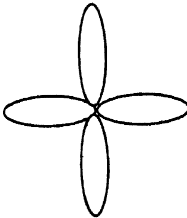
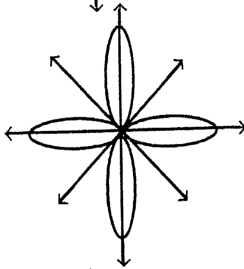
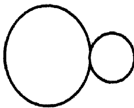
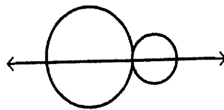
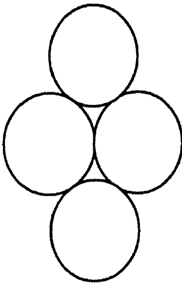
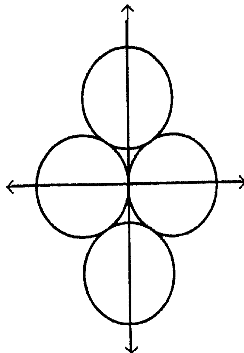
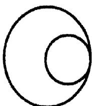
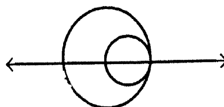


గమనిక : l రేఖ దృష్ట్యా 'P' యొక్క ప్రతిబింబము 'p^1' అయితే p, p^1 బిందువులను "సౌష్ఠవ బిందువులు" అని అంటాము.



కొన్ని పటాల సౌష్ఠవ రూపాలు మరియు సౌష్ఠవ అక్షాల సంఖ్య
(Some Symmetrical Figures and the Number of Axes of Symmetry) :

పటము	సౌష్ఠవ రూపము/రూపాలు	సౌష్ఠవ అక్షాల సంఖ్య
B	B	1
A	A	1
		2

పటము	సౌష్ఠవ రూపము/ రూపాలు	సౌష్ఠవ అక్షాల సంఖ్య
		1
		2
		4
		1
		2
		1

30. చలన జ్యామితి
(Motion (Transformation) Geometry)

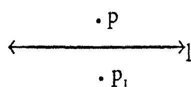
* పరివర్తనమనేది ఒక తలమందలి లేదా అంతరాళమందలి బిందువుల మధ్యగల అన్వేక సాదృశ్యము.

* చలన జ్యామితిని రూపాంతర పరిమాణ (చలన లేదా పరివర్తన) జ్యామితి అని అంటారు.

* పొడవులలో ఎట్టి మార్పు తీసుకొని రాని పరివర్తనను "తత్సమ పరిణామము" (Isometry) అని అంటారు.

పరావర్తన ప్రతిసర్జనము (Reflection Mapping) :

ఒక రేఖ l ను ఉపయోగించి p బిందువు నుండి p_1 బిందువును పొందే విధానాన్ని l లో పరావర్తనమని లేదా l దృష్ట్యా "సౌష్ఠవ ప్రతిసర్జనమని" అంటారు.



p_1 ను l లో p యొక్క ప్రతిబింబము (మాప్) అని లేక l లో పరావర్తన ప్రతిసర్జనము అని అంటారు. దీనిని సాంకేతికంగా $l(p) = p_1$ అని వ్రాస్తాము.

గమనిక : $l(p) = p_1$ అయితే $l(p_1) = p$ అగును.

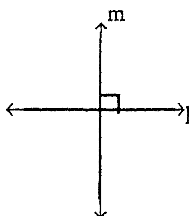
స్థిర బిందువులు; స్థిరరేఖ (Fixed (Invariant) Points; Invariant Line):

l రేఖను అనుసరించి చేసే పరావర్తనములో l కు చెందిన బిందువులు స్థిరబిందువులు. l రేఖ స్థిరరేఖ.
$l(A) = A; l(B) = B, \ldots\ldots\ldots$



లంబరేఖలు (Perpendicular Lines) :

l రేఖలో పరావర్తనము చేసినప్పుడు l రేఖకు భిన్నమైన వేరొక రేఖ m దానిపై అదే ప్రతిసర్జనము చేయబడితే, m రేఖను l కు లంబరేఖ అంటారు. 'లంబముగా ఉన్నది' అనే సంబంధము సౌష్ఠవ సంబంధము. కావున $l \perp m$ అయితే $m \perp l$ అగును.



31. రేఖా గణితము
(Geometry)

$\overline{AB}$ **రేఖా ఖండము** ($\overline{AB}$ Line Segment) : $\overline{AB}$ రేఖా ఖండము, A, B అను బిందువులు మరియు వాటి మధ్యనున్న అన్ని బిందువులను కలిగిన సమితి అని నిర్వచిస్తాము.

స్వీకృతము (Axiom) : నిరూపణగాని; వివరణగాని అవసరము లేకుండానే సత్యప్రవచనాలుగా రూపొందిపబడ్డ ప్రవచనాన్ని "స్వీకృతము" అని అంటారు.

ఉదా : సూర్యుడు తూర్పున ఉదయించి, పడమరన అస్తమించును.

గమనిక : స్వీకృతం అనేది స్వయం సిద్ధమయినట్టి లేక మనం సత్యము అని నమ్మి అంగీకరంచినట్టి వివరణ. దీనిని మనము ఋజువు చేసే ప్రశ్నేలేదు.

సిద్ధాంతము (Theorem) : మనము ఏర్పరచుకొనిన అనిర్వచిత, లేక నిర్వచిత పదాలు మరియు స్వీకృతాల సాయంతో మనము కొన్ని నూతన సంబంధాలు పొందుపరచగలము. ఈ నూతన సంబంధాలనే "సిద్ధాంతము" అని అంటారు.

(లేదా)

మనము అంగీకరించిన స్వీకృతాల సాయంతోను లేక ఇది వరకే ఋజువు చేయబడిన సిద్ధాంతాల సాయంతోను, ఋజువు చేయబడి అప్పుడు మాత్రమే సత్యాలుగా అంగీకరింపబడే వివరణను "సిద్ధాంతము" అని అంటారు.

ఉదా : "ఒక త్రిభుజములో రెండు భుజములు సమానమైతే వానికి ఎదురుగా నుండు కోణములు సమానమగును" అనే సిద్ధాంతాన్ని పరిశీలిస్తే, ఇది రెండు భాగములు కలిగి ఉంది. 'అయితే' అన్న షరతు దాకా ఉన్న భాగం మొదటి భాగం; ఆ తరువాత ఫలితమును తెలియజేస్తూ 'అగును' దాకా పేర్కొన్న భాగం రెండవ భాగము.

ఈ మొదటి భాగాన్ని దత్తాంశము అనియు, రెండవ భాగాన్ని సారాంశము అనియు అంటారు.

గమనిక : దత్తాంశ భాగము మనకు ఈయబడిన షరతును సూచిస్తుంది. సారాంశభాగము మనము నిరూపించవలసిన విషయాన్ని సూచిస్తుంది.

స్వీకృతాలు (Axioms) :

(i) ఒక తలములోని రెండు దత్త బిందువులను కలిగి ఉంటూ ఒకే ఒక సరళరేఖ ఉంటుంది.

ఈ స్వీకృతము 'బిందువు' మరియు 'రేఖ' అనే మౌలిక భావనలకు మధ్యగల పరస్పర సంబంధాన్ని తెలియజేస్తుంది.

(ii) సరేఖీయములు కాని మూడు దత్త బిందువులను కలిగి ఉంటూ ఒకే తలము ఉంటుంది.

(iii) ఒకే తలములోని ఏ రెండు బిందువులను కలిపే సరళరేఖ పూర్తిగా ఆ తలములోనే ఉంటుంది.

ఈ స్వీకృతము 'బిందువు' మరియు 'తలము' అనే మౌలిక భావనల పరస్పర సంబంధాన్ని తెలియజేస్తుంది.

* ఒక రేఖలోని A, B, C అను మూడు బిందువులు AB+BC = AC అగునట్లు ఉంటే, B బిందువు A, C లకు మధ్య ఉండును.

గమనిక :

బిందువు; రేఖ; తలము; అంతరాళము (Point; Line; Plane; Space) :

మనము ఒక చుక్క వంటి గుర్తును ఎప్పుడూ చూచినా దానిని ఒక "బిందువు" అని పిలుస్తాము.

అదే విధంగా ఒక బల్లయొక్క అంచుగాని, ఒక పుస్తకం యొక్క అంచుగాని చూచినప్పుడు దానిని మనము ఒక "రేఖ" అని గుర్తిస్తాము.

అదే విధంగా ఒక నల్లబల్ల యొక్క ఉపరిభాగాన్ని గాని, ఒక గోడ యొక్క ఉపరిభాగాన్ని గాని చూచినప్పుడు దాన్ని మనం ఒక "తలము" అని పిలుస్తాము.

భూమి; ఆకాశాల మధ్య ఉన్న యావత్ ప్రదేశాన్ని గూర్చి తలచినప్పుడు దానిని మనము "అంతరాళము" అని పిలుస్తాము.

* The Elements అనే గ్రంథాన్ని రచించినది "యూక్లిడియన్"

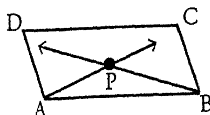
** **చతుర్భుజాలు** (Quardrilaterals) :

* చతుర్భుజపు కోణాల మొత్తము = 360^0

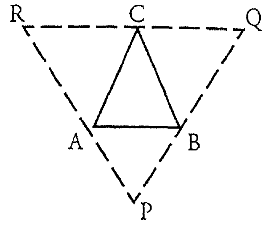
* సమాంతర చతుర్భుజపు ఒక జత ఆసన్నకోణాలు సంపూరకాలు

* ABCD సమాంతర చతుర్భుజములో

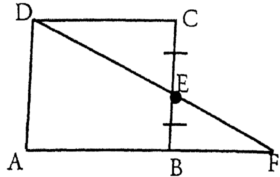
$\angle A$, $\angle B$ సమద్విఖండన రేఖల ఖండన బిందువు P. అయితే $\angle APB = 90^0$ అగును. ఇదే విధంగా $\angle C + \angle D = 2\angle APB$.



* ΔABC ఒక త్రిభుజము. A,B,C ల ద్వారా వరుసగా $\overline{CA}$, $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ లకు గీయబడిన సమాంతర రేఖలచే ΔPQR ఏర్పడితే $BC = \frac{1}{2}PR$ అగును.



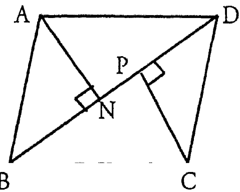
* ABCD సమాంతర చతుర్భుజములో BC మధ్యబిందువు E పొడిగింపబడిన $\overline{AB}$, $\overline{DE}$ ల ఖండన బిందువు F అయితే AF = 2.AB అగును.



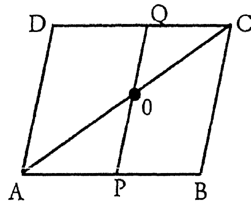
* ABCD సమాంతర చతుర్భుజములో $\overline{AN}$, $\overline{CP}$ లు $\overline{BD}$ కి లంబాలు అయితే

(i) $\Delta ADN \cong \Delta CBP$

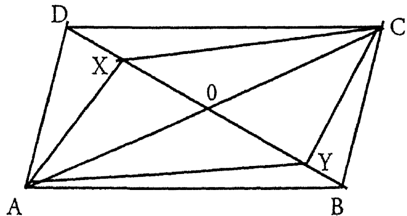
(ii) AN = CP అగును.



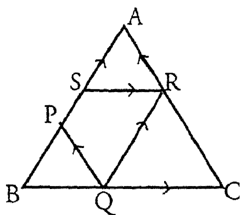
* ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజం. AP = CQ అగునట్లు P, Q లు వరుసగా $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ లపై బిందువులు అయిన $\overline{AC}$, $\overline{PQ}$ లు ఒకదాని నొకటి సమద్విఖండన చేసుకొంటాయి.



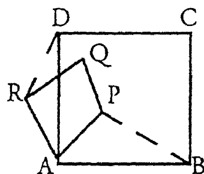
* ABCD సమాంతర చతుర్భుజములో DX = BY అగునట్లు, X, Y లు కర్ణము $\overline{BD}$పై రెండు బిందువులు



అయితే AXCY
సమాంతర
చతుర్భుజము అగును.

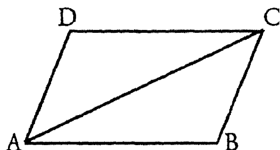


* ABC ఒక త్రిభుజము.
$\overline{PQ} \parallel \overline{AC}$; $\overline{QR} \parallel \overline{AB}$;
$\overline{RS} \parallel \overline{BC}$ అయితే
AS = PB అగును.

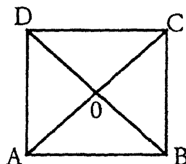


* ABCD ఒక చతురస్రము.
APQR వేరొక చతురస్రము
అయితే DR = BP అగును.

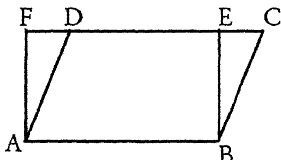
* సమాంతర చతుర్భుజపు కర్ణాలు
సమానమవుతూ ఒక దాని
నొకటి లంబసమద్విఖండన
చేసుకున్న అది చతురస్రము
అగును.



* ABCD ఒక సమచతుర్భుజము.
$\overline{AC}$ దాని కర్ణము అయితే
$\overline{AC}$, $\angle A$, $\angle C$ లను
సమద్విఖండన చేస్తుంది.



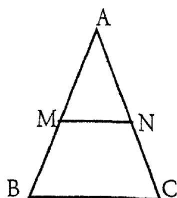
* చతురస్రపు కర్ణాలు సమానము
మరియు ఒక దానినొకటి
లంబసమద్విఖండన
చేసుకొంటాయి.



* ABCD సమాంతర
చతుర్భుజము, ABEF
దీర్ఘచతురస్రము అయితే
$\Delta AFD \cong \Delta BEC$

* ఒక త్రిభుజ రెండు భుజాల మధ్య బిందువులను కలిపే రేఖా ఖండము మూడవ భుజానికి సమాంతరంగాను, అందులో సగము ఉంటుంది.

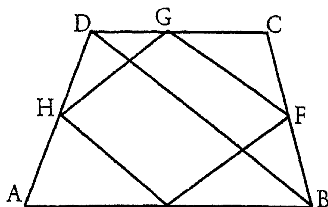
అనగా $MN = \frac{1}{2}BC$; $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$



* ఒక సమ చతుర్భుజాన్ని దాని కర్ణాలు నాలుగు సర్వసమాన త్రిభుజాలుగా విభజిస్తాయి.

* ఒక త్రిభుజములో ఒక భుజపు మధ్య బిందువు నుండి వేరొక భుజానికి సమాంతరంగా గీయబడిన రేఖ, మూడవ భుజాన్ని సమద్విఖండన చేస్తుంది.

* □ABCD లో E, F, G, H లు వరుసగా $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ ల మధ్య బిందువులు EFGH అయితే సమాంతర చతుర్భుజము అగును.



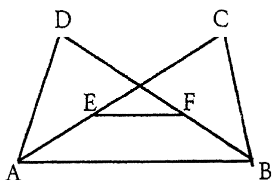
* సమాంతర చతుర్భుజపు మధ్య బిందువులను వరుసగా కలిపిన ఏర్పడు పటము సమాంతర చతుర్భుజము.

* ABCD ఒక సమచతుర్భుజము. E, F, G, H లు వరుసగా $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ ల మధ్యబిందువులు అయితే EFGH చతురస్రం అగును.

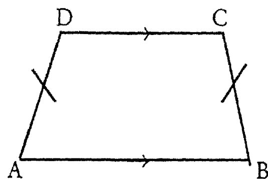
* ABCD ఒక చతుర్భుజము. E, F, G, H లు వరుసగా $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ ల మధ్యబిందువులు. EFGH సమచతుర్భుజమైన ABCD దీర్ఘచతురస్రము అగును.

* ఒక చతురస్ర భుజాల మధ్య బిందువులను వరుసగా కలిపిన ఏర్పడిన పటము చతురస్రము.

* ABCD ఒక సమలంబ చతుర్భుజము. $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, E, F లు వరుసగా $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ ల మధ్య బిందువులు. అయితే $EF = \frac{1}{2}(AB - CD)$ అగును.

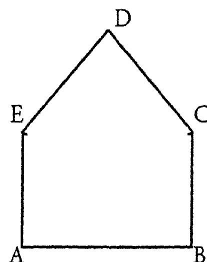


* ABCD ఒక సమద్విబాహు సమలంబ చతుర్భుజము. $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$, AD = BC అయితే
$\angle A + \angle C = 180^0$;
$\angle B + \angle D = 180^0$.



* సమద్విబాహు సమలంబ చతుర్భుజ కర్ణాలు సమానము.

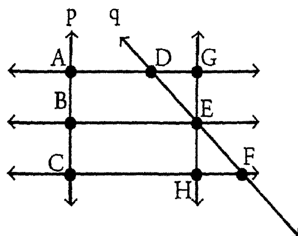
* ABCDE పంచభుజిలో ఏ రెండు భుజాలు సమానము కాదు. B, C, D, E ల వద్ద ఏర్పడిన అంతరకోణాలలో ప్రతి ఒక్కటి 120^0 ఉంటుంది. మరియు AB = ED + DC అగును.



* మూడుగాని అంతకంటే ఎక్కువగాని సమాంతర రేఖలు ఒక తిర్యక్ రేఖపై సమాన అంతర ఖండాలు చేస్తే అవి

ఏ ఇతర తిర్యగ్రేఖపై నైనా గాని సమాన అంతర ఖండాలు చేస్తాయి.

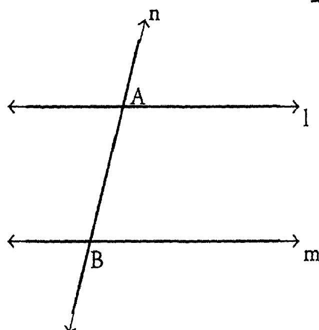
అనగా ప్రక్క పటంలో DE = EF.



అంతరఖండాలు (Intercepts) :

l, m లు ఒకే తలంలో ఉన్న రెండు రేఖలు. తిర్యగ్రేఖ n వాటిని A, B ల వద్ద ఖండిస్తున్నది. అయితే l, m రేఖలు తిర్యగ్రేఖ n పై $\overline{AB}$ అనే "అంతర ఖండము"ను చేస్తున్నాయంటారు.

(లేదా)



తిర్యగ్రేఖ n పై l, m లచే ఖండింపబడ్డ అంతరఖండము $\overline{AB}$.

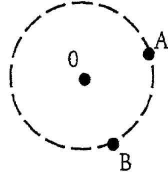
* నాలుగు భుజాలు కలిగిన బహుభుజిని "చతుర్భుజము" అంటారు.
* ఒక జత అభిముఖ భుజాలు సమాంతరముగా గల చతుర్భుజాన్ని "సమలంబ చతుర్భుజము" అంటారు.
* అసమాంతర భుజాలు సమానముగా గల సమలంబ చతుర్భుజాన్ని "సమద్విబాహు సమలంబ చతుర్భుజము" అని అంటారు.
* రెండు జతల అభిముఖ భుజాలు సమాంతరముగా గల చతుర్భుజాన్ని "సమాంతర చతుర్భుజము" అంటారు.
* సమాంతర చతుర్భుజములో

  (i) అభిముఖ భుజాలు సమానము;

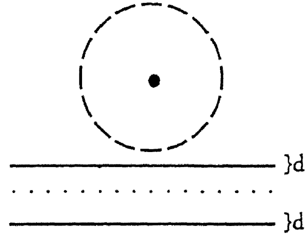
  (ii) అభిముఖ కోణాలు సమానము;

  (iii) కర్ణాలు ఒకదాని నొకటి సమద్విఖండన చేసుకొంటాయి.
* ఒక కోణము లంబకోణముగా గల సమాంతర చతుర్భుజము ఒక "దీర్ఘ చతురస్రము".
* దీర్ఘ చతురస్రపు ప్రతీ కోణము లంబకోణము. దాని కర్ణాలు సమానము. అవి ఒక దాని నొకటి సమద్విఖండన చేసుకొంటాయి.
* ఒక జత ఆసన్నభుజాలు సమానముగా గల దీర్ఘ చతురస్రాన్ని "చతురస్రము" అని అంటారు.
* ఒక చతురస్రపు అన్ని భుజాలు సమానము. దాని ప్రతి కోణము లంబకోణము. దాని కర్ణాలు సమానము. అవి ఒక దాని నొకటి లంబసమద్విఖండన చేసుకొంటాయి.
* ఒక జత ఆసన్నభుజాలు సమానముగా గల సమాంతర చతుర్భుజము ఒక సమ చతుర్భుజము.
* ఒక సమచతుర్భుజపు భుజాలన్నీ సమానము. దాని కర్ణాలు ఒక దాని నొకటి లంబసమద్విఖండన చేసుకొంటాయి.
* ఒక సమాంతర చతుర్భుజపు కర్ణాలు సమానమై, అవి ఒక దాని నొకటి లంబసమద్విఖండన చేసుకుంటే, ఆ సమాంతర చతుర్భుజము చతురస్రము అవుతుంది.

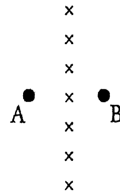
బిందుపథము (Locus) : ఇవ్వబడిన నియమానికి లేక నియమాలకు అనుగుణంగా ఉండే బిందు సమితిని "బిందు పదము" అని అంటారు.



* బిందు పథాన్ని "లోకస్" అంటారు. ఇది లాటిన్ పదము. దీని అర్థము "స్థానము" లేక "ఉనికి".
* బిందుపదానికి చెందిన ప్రతిబిందువు ఇవ్వబడిన నియమానికి లేక నియమాలకు అనుగుణంగా ఉంటుంది.
* ఇవ్వబడిన బిందువులకు సమాన దూరములో గల అదే తలానికి చెందిన బిందుపథము "వృత్తము".
* ఒక తలములో గల రెండు సమాంతర రేఖలకు సమాన దూరంలో గల అదే తలానికి చెందిన బిందుపథము ఆ రెండు సమాంతర రేఖలకు సమాంతరంగాను, వాటి మధ్యను ఉండే రేఖ.

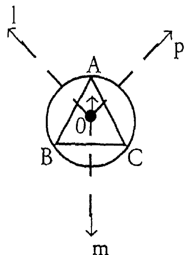


* ఉమ్మడి ధర్మాన్ని కలిగి ఉన్న అన్ని బిందువుల వల్ల ఏర్పడే ఆకృతిని ఆ బిందువుల "బిందుపథము" అని అంటారు.
* ఇవ్వబడిన రెండు బిందువులు A, B లకు సమాన దూరములో గల బిందుపథము $\overline{AB}$ యొక్క లంబ సమద్విఖండన రేఖ అవుతుంది.



* $C = \{x/0x = r\}$ ఇది 0 ను కేంద్రముగా కలిగి r వ్యాసార్థముగా గల వృత్తము.
* ఒక తలములో గల రెండు బిందువులకు సమాన దూరములో గల బిందుపథము ఆ రెండు బిందువులను కలిపే రేఖా ఖండపు లంబసమద్విఖండన రేఖ.

* ఒక తలంలో ఉండే సరేఖీయాలు కాని మూడు బిందువులకు సమాన దూరములో ఉన్న బిందువు యొక్క బిందుపథము "పరివృత్తము" అగును.



* సరేఖీయాలు అయిన మూడు బిందువులకు సమాన దూరములో ఏ బిందువు ఉండదు.

* అంతరాళములో ఒక స్థిర బిందువుకు స్థిరదూరములో గల బిందు సమితి "గోళము".

* అంతరాళములో ఒక రేఖకు ఇవ్వబడిన దూరములో గల బిందు సమితి "స్థూపము".

బిందుపథానికి ఉదాహరణలు :

(i) గడియారములోని సెకండ్ల ముల్లు చివరి భాగము యొక్క బిందుపథము – ఒక వృత్తము.

(ii) తిన్నని రోడ్డు వెంట నడుస్తున్న మనుజుని తల బిందుపథము – రేఖ.

(iii) కంపనాలు చేస్తున్న లఘులోలకపు చివరి భాగము బిందుపథము – చాపము.

(iv) తిన్నని రోడ్డు మీద పోవుచున్న బండి చక్రపు కేంద్రము బిందుపథము – రేఖ.

(v) పై నుండి కిందకు స్వేచ్ఛగా పడుతున్న వస్తువు యొక్క బిందుపథము – రేఖ.

(vi) సూర్యుడి చుట్టు తిరుగుతున్న భూమి యొక్క మార్గము – దీర్ఘవృత్తం

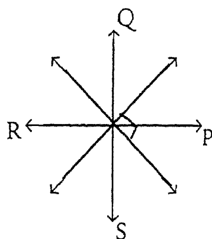
(vii) నిశ్చలంగా ఉన్న నీటిలో ఒక రాయిని వేస్తే వచ్చిన అల (1 సెకండు తరువాత) బిందుపథము – ఏకకేంద్ర వృత్తము.

(viii) ఒక వృత్తాకారపు బాట యొక్క లోపలి అంచు నుండి ఎప్పుడూ ఒక మీటరు దూరములో ఉండేటట్లు పరుగెత్తుతున్న మనుజుని పదము – వృత్తము.

(ix) ఒక తిన్నని రోడ్డు యొక్క రెండు అంచులకు సమాన దూరములో ఉండేటట్లు నడిచే మనుజుని పదము – రేఖ.

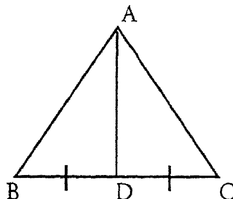
(x) ఒక దానితో ఒకటి స్పర్శించేటట్లు రెండు నాణాలు ఒక బల్లమీద ఉన్నాయి. అందులో ఒక నాణెన్ని స్థిరంగా ఉంచి, రెండవ దానిని స్థిరంగా ఉన్న నాణెపు అంచును స్పర్శించేటట్లు భ్రమణము చేస్తే తిరుగుతున్న నాణెపు బిందుపదము – వృత్తము.

* ఒక తలములో గల రెండు ఖండన రేఖలకు సమాన దూరములో గల బిందుపథము ఆ ఖండన రేఖలచే ఏర్పడే కోణాల సమద్విఖండన రేఖల సమ్మేళనము.



* రెండు రేఖల ఖండనచే ఏర్పడు కోణాల సమద్విఖండన రేఖలు ఒకదాని నొకటి లంబాలు.

మధ్యగత రేఖ (Median) : ఒక త్రిభుజ శీర్షాన్ని ఆ శీర్షపు ఎదుటి భుజపు మధ్య బిందువుతో కలిపే రేఖా ఖండాన్ని ఆ త్రిభుజ "మధ్యగత" అంటారు.

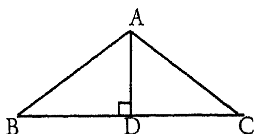


వివరణ : ΔABC యొక్క ఒక శీర్షము A. దాని ఎదుటి భుజము. $\overline{BC}$. $\overline{BC}$ మధ్యబిందువు D. A, D లను కలిపే రేఖా ఖండము $\overline{AD}$. $\overline{AD}$ ను ΔABC యొక్క మధ్యగత అంటారు.

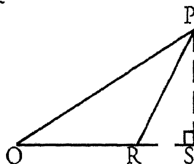
* ఒక త్రిభుజ భుజాల మొత్తము దాని మధ్యగతముల మొత్తము కంటె ఎక్కువ.

* ఒక త్రిభుజపు ఏ రెండు మధ్యగతాల మొత్తమైనా గాని మూడవ మధ్యగతం కంటె ఎక్కువ.

ఉన్నతి (Altitude) : ఒక త్రిభుజములో ఒక శీర్షాన్ని, ఆ శీర్షపు ఎదుటి భుజాన్ని కలిగి ఉన్న రేఖకు దాని నుండి గీయబడిన లంబము యొక్క పాదాన్ని కలిపే రేఖా ఖండాన్ని ఆ త్రిభుజపు "ఉన్నతి" (ఆ భుజాన్ని అనుసరించి) అంటారు.



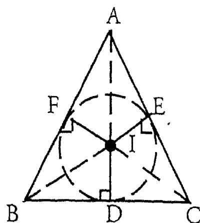
($\overline{AD}$ ఉన్నతి)



(ఇచ్చట $\overline{PS}$ ఉన్నతి)

వివరణ : ΔABCలో A ఒక శీర్షము. $\overline{BC}$ ఆ శీర్షపు ఎదుటి భుజము. $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ A నుండి $\overline{BC}$ కి గీయబడిన లంబము $\overline{AD}$. D లంబపాదము $\overline{AD}$ ని ΔABC యొక్క ఉన్నతి అంటారు.

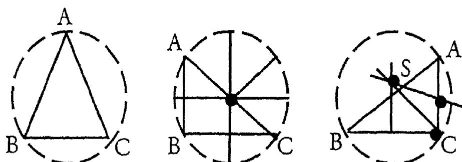
అంతర వృత్తము మరియు అంతరవృత్త కేంద్రము (Incircle and Incentre): త్రిభుజకోణ సమద్విఖండన రేఖల మిళిత బిందువును ఆ త్రిభుజ "అంతర వృత్తకేంద్రము" అంటారు.



వివరణ : ID = IE = IF = r. $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ లకు వరుసగా I నుండి గీయబడిన లంబపాదాలు D, E, F. I ని అంతర వృత్త కేంద్రము అంటారు.

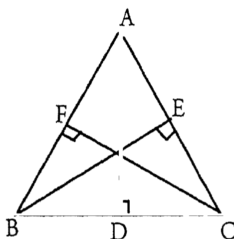
* త్రిభుజ అంతర వృత్త కేంద్రము ఆ త్రిభుజ భుజాలకు సమాన దూరంలో ఉంటుంది.

పరివృత్త కేంద్రము (Circum Centre) : త్రిభుజ భుజాల లంబసమద్విఖండన రేఖల మిళిత బిందువును ఆ త్రిభుజ "పరివృత్త కేంద్రము" అంటారు.

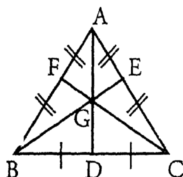


* త్రిభుజ పరివృత్త కేంద్రము ఆ త్రిభుజ శీర్షాలకు సమాన దూరంలో ఉంటుంది. SA = SB = SC = R. R ను పరివృత్త వ్యాసార్థము అంటారు.

లంబకేంద్రము (Ortho centre) : త్రిభుజ శీర్షాల నుండి వాటి ఎదుటి భుజాలకు గీయబడిన లంబరేఖల మిళిత బిందువును ఆ త్రిభుజపు "లంబ కేంద్రము" అంటారు.



గురుత్వకేంద్రము (Centroid) : త్రిభుజ మధ్యగత రేఖల మిళిత బిందువును "గురుత్వ కేంద్రము" లేదా "కేంద్రాభాసము" అంటారు. దీనిని "G" తో సూచిస్తాము.



* గురుత్వ కేంద్రము ప్రతి మధ్యగతాన్ని 2:1 నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది.

* ప్రక్క పటంలో $AG:GD = 2:1$

$BG:GE = 2:1$

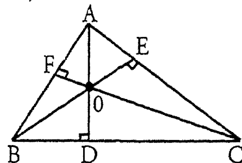
$CG:GF = 2:1$

ఇదే విధంగా $BG = \frac{2}{3}BE$ మరియు $GE = \frac{1}{3}BE$.

* ఒక త్రిభుజపు రెండు మధ్యగత రేఖలు సమానమైన అది "సమద్విబాహు త్రిభుజము" అగును.

* $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$ లు ΔABC యొక్క మధ్యగతములు. వాటి మిళితబిందువు G. అయితే

$4(AD + BE + CF) > 3(AB + BC + CA)$ అగును.



* ΔABC యొక్క లంబ కేంద్రము "0" అయితే

(i) $\Delta 0BC$ యొక్క లంబ కేంద్రము A

(ii) $\Delta 0AC$ యొక్క లంబ కేంద్రము B

(iii) $\Delta 0AB$ యొక్క లంబ కేంద్రము C.

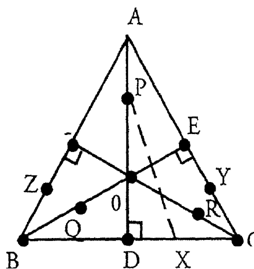
* ABC త్రిభుజములో $\angle A + \angle B = \angle C$ అయితే దాని లంబకేంద్రము C

* ABC త్రిభుజములో $\angle B + \angle C = \angle A$ అయితే దాని లంబకేంద్రము A

* ABC త్రిభుజములో $\angle C + \angle A = \angle B$ అయితే దాని లంబకేంద్రము B అగును.

అయిలర్ రేఖ (Euler's Line) : సమబాహు త్రిభుజము కానటువంటి ఏదైనా త్రిభుజము ABC యొక్క పరివృత్త కేంద్రము "S"; గురుత్వ కేంద్రము "G"; లంబకేంద్రము "0" మరియు అంతర వృత్త కేంద్రము "I" అయితే 0, G, S ల ద్వారా పోయే రేఖను "అయిలర్ రేఖ" అంటారు.

* $\overline{0S}$ ను G త్రిధాకరిస్తుంది.



నవ బిందు వృత్తము (The nine point circle) : సమబాహు త్రిభుజము కానటువంటి ఏదైనా ఒక త్రిభుజము ABC ని గీయండి.

ఉన్నతులు $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$ లను గీయండి. వాటి మిళిత బిందువు 0. $\overline{0A}$, $\overline{0B}$, $\overline{0C}$ ల మధ్య బిందువులైన P, Q, R లను గుర్తించండి.

$\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ ల మధ్య బిందువులైన X, Y, Z లను గుర్తించండి. $\overline{XP}$ ను కలుపండి.

$\overline{XP}$ వ్యాసముగా వృత్తాన్ని గీయండి.

XP వ్యాసముగా గల వృత్తము D, E, F, X, Y, Z, P, Q, R ల ద్వారా పోయినది. కనుక దానిని నవబిందు వృత్తము అంటారు.

* సమబాహు త్రిభుజపు పరివృత్త కేంద్రము; అంతర వృత్త కేంద్రము; లంబకేంద్రము; గురుత్వ కేంద్రము, ఒకదానితో ఒకటి ఏకీభవిస్తాయి.

* * *

32. సమితులు
(Sets)

సమితి (Set) : ఒక సునిర్వచిత వస్తువుల సముదాయాన్ని "సమితి" అని అంటారు.

* జర్మన్ శాస్త్రవేత్త జార్జికాంటర్ తన గణిత పరిశోధనలో సమితివాదాన్ని అభివృద్ధిపరిచాడు.

సమితి (Set) : సాధారణంగా వస్తువుల సముదాయమును "సమితి" అంటారు.

మూలకము (Element) : సమితిలోని వస్తువులను "మూలకములు" అంటారు.

సునిర్వచిత సమితి (Well Defined Set) **:** కొన్ని వస్తువుల సమితి ఇస్తే దాని యందు గల వస్తువులను, దాని యందులేని వస్తువులను వేర్పర్చగలము. అట్టి సమితిని "సునిర్వచిత సమితి" అంటారు.

(లేదా)

ఒక దత్త వస్తువు ఒక సమితికి చెందిందో, లేదో నిర్ణయించగలిగినప్పుడు ఆ సమితిని "సునిర్వచిత సమితి" అంటారు.

గమనిక : ఇచ్చుట వస్తువు అనేది ఒక మనిషి కావచ్చు; సంఖ్య కావచ్చు; అక్షరము కావచ్చు; ఏదైనా కావచ్చు.

* సమితిని వ్రాయునప్పుడు ప్రతి మూలకాన్ని రెండు లేక మూడుసార్లు తిరిగి, తిరిగి పేర్కొనక ఒక్కసారి మాత్రమే వ్రాస్తాము.

ఉదా : a, a, b, b, c, c, d, c, d, d అనే మూలకాలు (అక్షరాలు) గల సమితిని {a, b, c, d} అని వ్రాస్తాము.

జాబితా రూపము (లేదా) రోస్టరు రూపము (List form (or) Roster Form)**: సమితిలో**ని మూలకాలన్నింటిని కామా (,) లలో వేరుచేసి రాసే పద్ధతిని "జాబితా రూపము" లేక "రోస్టర్ రూపము" అంటారు.

ఉదా :

1. సహజ సంఖ్యా సమితి N = {1, 2, 3, ...}
2. పూర్ణ సంఖ్యల సమితి Z = {..............,-2, -1, 0, 1, 2,............}

సమితి నిర్మాణ రూపము (లేదా) లాక్షణిక రూపము (Set Builder Form (or) Rule Form): సమితిని, సమితి యందలి మూలకముల ధర్మమును వివరించడం ద్వారా సూచిస్తే దానిని "సమితి నిర్మాణ రూపము" లేక "లాక్షణిక రూపము" అంటారు.

ఉదా 1 : B అనేదిఅన్ని సరి సహజ సంఖ్యలను కలిగి ఉన్న సమితి అయితే

B = {x/x అనేది ఒక సరి సహజ సంఖ్య}.

ఉదా 2 : C = {2, 3, 5, 7, 11}. C అనేది 13 కంటె తక్కువైన ప్రధాన సంఖ్యల సమితి అయితే C = {x/x అనేది 13 కంటె తక్కువైన ఒక ప్రధాన సంఖ్య}.

* చెందును "$\in$" తో సూచిస్తాము. (belongs to)

* చెందదును "$\notin$" తో సూచిస్తాము. (not belongs to)

ఉదా : A = {1, 2, 3, 4, 5} అయితే $1 \in A$; $3 \in A$; $6 \notin A$; $9 \notin A$.

శూన్యసమితి (Null Set) : మూలకాలు ఏమిలేనట్టి సమితిని "శూన్యసమితి" అంటారు.

* శూన్యసమితిని "f" లేదా "{ }" తో సూచిస్తాము.

* f = { }

ఉదా : సున్నా కంటె చిన్నవైన సహజ సంఖ్యా సమితి A = { }

గమనిక : f; {0}; {f} అనునవి మూడు వేర్వేరు సమితులు.

ఏకమూలక సమితి (Singleton Set) : ఒకే ఒక మూలకాన్ని కలిగియున్నట్టి సమితిని "ఏక మూలక సమితి" అంటారు.

ఉదా : సరి ప్రధానాంకాల సమితి = {2}.

పరిమిత సమితి (Finite Set) : సమితిలో మూలకాల సంఖ్య పరిమితంగా (లెక్కించుటకు వీలుగా) ఉంటే అట్టి సమితిని "పరిమిత సమితి" అంటారు.

ఉదా : A = {1, 2, 3, 4}

అపరిమిత సమితి (Infinite Set) : సమితిలోని మూలకాల సంఖ్య లెక్కించుటకు వీలుకాకపోతే (అపరిమితంగా ఉంటే) అట్టి సమితిని "అపరిమిత సమితి" అంటారు.

ఉదా : సహజ సంఖ్యా సమితి N = {1, 2, 3, ...}

సమ సమితులు (Equall Sets) : A సమితిలో గల మూలకాలన్నియు B సమితిలో ఉంటూ, B సమితిలో గల మూలకాలన్నియు A సమితిలో ఉంటే అట్టి సమితులను "సమ సమితులు" అంటారు.

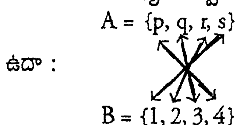
గమనిక : A, B లు సమ సమితులు అయితే వాటిని "A = B" తో సూచిస్తాము.

ఉదా: A = {1, 2, 3, 4,.........} N=సహజ సంఖ్యా సమితి అయితే A=N అగును.

ఉదా : A = {p, q, r, s}; B = {1, 2, 3, 4} అయితే A ≠ B అగును.

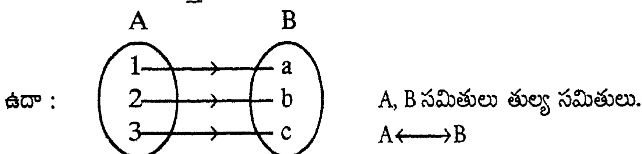
సమితుల అన్వేక సాదృశ్యము (One-to-One Correspondence) : A సమితిలో ప్రతి మూలకము, B సమితిలోని ఒకే ఒక మూలకంతోను మరియు B సమితిలోని ప్రతి మూలకము A సమితిలోని ఒకే ఒక మూలకంతోను జతపరచబడితే ఆ సమితుల మధ్య "అన్వేక సాదృశ్యం" ఉంది అంటారు.

ఉదా :



తుల్యసమితులు (Equivalent Sets) : A, B సమితుల మధ్య అన్వేక సాదృశ్యం ఉంటే ఆ సమితులను "తుల్య సమితులు" అంటారు. తుల్యసమితులను A~B లేక A⟷B గా సూచిస్తారు.

ఉదా :



వివరణ : A సమితిలోని ప్రతి మూలకము B సమితిలోని ఒకే ఒక మూలకంతోను; B సమితిలోని ప్రతి మూలకము A సమితిలోని ఒకే ఒక మూలకంతోను అన్వేక సాదృశ్యం చూపబడినది.

A, Bలలో ఏ మూలకము జతపరచకుండ వదిలివేయబడలేదు. కావున A, B సమితులు తుల్య సమితులు.

i.e., A ⟷ B

* అన్ని సమ సమితుల మధ్య అన్వేక సాదృశ్యం కలదు.

గమనిక : సమ సమితులన్నియు తుల్య సమితులు అవుతాయి. కాని తుల్య సమితులు అన్నీ సమ సమితులు కానేరవు.

గమనిక : సమానత్వం; తుల్యత అనేవి రెండు వేరువేరు భావనలు.

కార్డినల్ సంఖ్య (Cardinal Number) : సమితిలో గల మూలకాల సంఖ్యను ఆ సమితి యొక్క "కార్డినల్ సంఖ్య" అని అంటారు.

గమనిక : A సమితి యొక్క కార్డినల్ సంఖ్యను "n(A)" చే సూచిస్తాం.

ఉదా : A = {2, 4, 6, 8, 10} అయితే n(A) = 5.

* శూన్య సమితి యొక్క కార్డినల్ సంఖ్య n(f) = 0.

వివరణ : ఎందుకనగా శూన్యసమితిలో మూలకాలు లేవు.

ఉపసమితి - ఉన్నత సమితి (Subset - Superset) : A సమితిలో ఉన్న ప్రతిమూలకము B సమితిలో ఉంటే A సమితిని B సమితి యొక్క "ఉపసమితి" అంటారు.

B సమితిని A సమితి యొక్క "ఉన్నత సమితి" అంటారు.

* A సమితి B సమితికి ఉపసమితి అయితే దానిని "$A \subset B$" చే సూచిస్తాము.
* A సమితి B సమితికి ఉన్నత సమితి అయితే దానిని "$A \supset B$" చే సూచిస్తాము.

ఉదా : A = {a, e, i, o, u} ; B = {a, b, c,..........z} అయితే $A \subset B$; $B \supset A$ అగును.

* $A \subset B$; $B \subset A$ అయితే A = B అగును.
* ప్రతి సమితి దానికదే ఉపసమితి.

క్రమోప సమితి (Proper Subset) : $Y \subset X$ మరియు $Y \neq X$ అయితే Y ని X యొక్క "క్రమోపసమితి" అంటారు.

గమనిక : B లో లేనట్టి ఒక మూలకమైన A లో ఉంటే A సమితి, B సమితికి ఉపసమితి కాదు.

ఉదా : X = {1, 2, 3, 4, 5}; Y = {2, 3, 4} అయితే Y ని X యొక్క క్రమోపసమితి అంటారు.

వివరణ : Y సమితిలో గల ప్రతి మూలకము X సమితిలో కలదు. కాబట్టి $Y \subset X$. మరియు X సమితిలో Y సమితికన్నా అదనముగా కొన్ని మూలకాలు కలవు. కావున $Y \subset X$ మరియు $Y \neq X$ అయితే Y ని X యొక్క "క్రమోపసమితి" అని అంటారు.

* A = {1, 2, 3}; B = {1, 2, 4} అయితే $3 \in A$; $3 \notin B$; $A \not\subset B$; $B \not\subset C$.

* $\phi \subset P$
* శూన్యసమితి ప్రతి సమితి యొక్క ఉపసమితియే.
* $A \subset B$ మరియు $B \subset C$ అయితే $A \subset C$. ఈ ధర్మాన్ని "సంక్రమణ ధర్మము" అంటారు.
* "$\subset$" అనే గుర్తు ఒక సంబంధాన్ని తెలియజేస్తుంది.

గమనిక : "$\subset$" అనే గుర్తుకు రెండువైపులా సమితులను మాత్రమే వ్రాయాలి.

* ఒక సమితిలో 'n' మూలకాలు ఉంటే, అందలి ఉపసమితుల సంఖ్య=2^n.
* ఒక సమితిలో 'n' మూలకాలు ఉంటే, క్రమోపసమితుల సంఖ్య = 2^n-1

ఘాత సమితి (Power Set) : దత్త సమితి A కి గల ఉపసమితులన్ని మూలకాలు గల సమితిని A సమితి యొక్క "ఘాత సమితి" అంటారు.

A సమితి యొక్క ఘాత సమితిని P(A) తో సూచిస్తాము.

సమితిలో n మూలకాలు ఉంటే, దాని ఘాత సమితిలో 2^n మూలకాలు ఉంటాయి.

వివరణ : $A = \{1, 2, 3\}$ సమితిలో

మూలకాల సంఖ్య = 3

ఉప సమితులు = ϕ, A, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {2, 3}, {3, 1}

ఉప సమితుల సంఖ్య = $8 = 2^3$

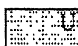
క్రమోపసమితులు = ϕ, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {2, 3}, {3, 1}

క్రమోప సమితుల సంఖ్య = $7 = 2^3-1$.

విశ్వసమితి (Universal Set): దత్త సమస్యలో మనము తీసుకొనే సమితులన్ని ఒక స్థిరమైన సమితి sకు ఉపసమితులు అయితే అట్టి సార్వత్రిక సమితి Sను సార్వత్రిక సమితి లేదా "విశ్వసమితి" అంటారు.

* విశ్వసమితిని "μ" లేక "℧" లేక "s" అను అక్షరాలచే సూచిస్తారు.
* విశ్వసమితిని సూచించడానికి దీర్ఘ చతురస్రాన్ని వాడుతుంటారు.
* విశ్వసమితిని సార్వత్రిక సమితి అని కూడా అంటారు.

వియుక్త సమితులు (Disjoint Sets) : A, B సమితులలో ఉమ్మడి మూలకాలు లేకుంటే A, B సమితులను "వియుక్త సమితులు" అని అంటారు.

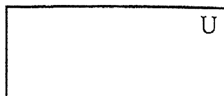


i.e., $A \cap B = \phi$

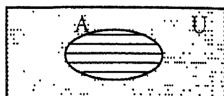
ఉదా : A = బేసి సంఖ్యల సమితి; B = సరి సంఖ్యల సమితి అయితే $A \cap B = \phi$

వెన్ చిత్రాలు (Venn Diagrams) : సమితులను సూచించడానికి సరళ సంవృత పటాలను వాడుతాము. ఈ పటాలను వెన్-అయిలర్ చిత్రాలు (లేదా) వెన్ చిత్రాలు అని అంటారు.

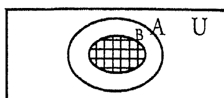
* విశ్వసమితిని సూచించడానికి సాధారణంగా దీర్ఘ చతురస్రాన్ని వాడుతుంటారు.



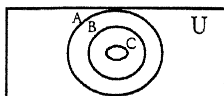
* $A \subset U$. U లో A ఇమిడి ఉన్నది. లేక A, U లో ఇమిడి ఉన్నది. $U \supset A$ (లేదా) $A \subset U$.

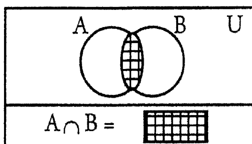


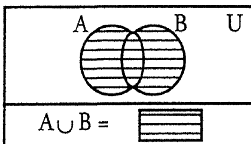
* $B \subset A$ మరియు $A \subset U$ అయితే B, A లో ఇమిడి ఉన్నది. A, U లో ఇమిడి ఉన్నది.

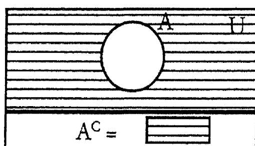


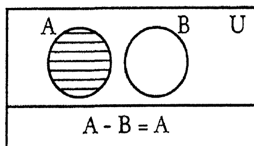
* C, B లో ఇమిడి ఉన్నది. B, A లో ఇమిడి ఉన్నది. A, U లో ఇమిడి ఉన్నది.

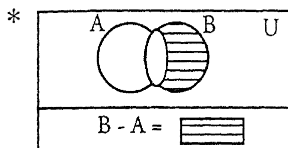


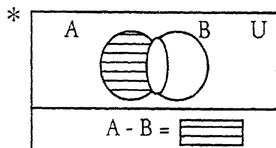
*


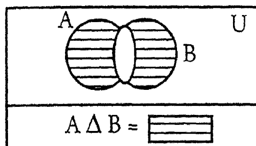
*


*


*


* 

* 



సమితుల సమ్మేళనము (Union of Sets) : A లో కాని లేక B లో కాని లేక రెండింటిలో కాని ఉన్న మూలకాలు అన్నింటిని కలిగి యుండే సమితిని A, B ల "సమ్మేళన సమితి" అని అంటారు.

దీనిని "$A \cup B$" తో సూచిస్తాము.

$A \cup B$ **యొక్క లాక్షణిక రూపం** (Set builder form of $A \cup B$) :

$A \cup B = \{x / x \in A$ లేదా $x \in B$ లేదా $x \in A$ మరియు $x \in B\}$

* $A \cup B$; $B \cup A$ లు సమ సమితులు

* రెండు సమితుల సమ్మేళనము స్థిత్యంతర ధర్మమును కలిగి ఉండును.
  i.e., $A \cup B = B \cup A$.

* సమితుల సమ్మేళనము సహచర ధర్మాన్ని కలిగి ఉండును.
  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

* $A \cup \phi = \phi \cup A = A$ (తత్సమాంశ ధర్మము)

ϕ అనునది సమితుల సమ్మేళనము నందు తత్సమాంశము అనగా శూన్యసమితితో ఏ సమితిని సమ్మేళనము చేసినా తిరిగి అదే సమితి లభిస్తుంది.

అపవర్తిత ధర్మము (Idempotent Law) : A అనునది ఏదేని ఒక సమితి అయితే $A \cup A = A$ అగును.

సమితుల ఛేదనము (Intersection of Sets) : A మరియు B అనే రెండు సమితులలోని ఉమ్మడి మూలకాలను కలిగియుండే సమితిని A, B ల ఛేదన సమితి అంటారు. దీనిని "$A \cap B$" తో సూచిస్తాము.

$A \cap B$ యొక్క లాక్షనిక రూపము (Set builder form of $A \cap B$) :

$A \cap B = \{x/x \in A$ మరియు $x \in B\}$

* సమితుల ఛేదనము స్థిత్యంతర ధర్మమును కలిగి ఉండును. అనగా $A \cap B = B \cap A$.
* సమితుల ఛేదనము సహచర ధర్మాన్ని కలిగి ఉండును. అనగా $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
* $A \cap \phi = \phi = \phi \cap A$
* $A \cap A = A$
* $A \cap B$; $B \cap A$ లు సమ సమితులు.
* ఛేదనము సమ్మేళనముపై విభాగ న్యాయమును పాటిస్తుంది.
* $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
* $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
* $n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$
* సమ్మేళనం ఛేదనంపై విభాగ న్యాయాన్ని పాటిస్తుంది.

  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

సమితి పూరకము (Complement of a Set) : విశ్వసమితి U కు చెంది, A సమితికి చెందని మూలకాలున్న సమితిని A సమితి యొక్క పూరకము అంటారు. దీనిని A^c లేదా A^1 చే సూచిస్తాము.

* $A^c = U\text{-}A$

అనగా A^C సమితి విశ్వసమితి U లో ఉంటూ, A సమితిలో లేని మూలకాలు ఉంటాయి.

* A^c యొక్క సమితి నిర్మాణ రూపము.

  $A^c = \{x/x \in U$ మరియు $x \notin A\}$ మరియు $A = \{x/x \in U$ మరియు $x \notin A^c\}$
* $A \cup A^c = U$

సమితుల భేదము (Difference of Sets): A సమితిలో ఉంటూ B లో లేని మూలకాల సమితిని A,B సమితుల భేదము అని అంటారు. దీనిని "A-B" తో సూచిస్తాము.

* $A-B = \{x/x \in A$ మరియు $x \notin B\}$
* $A-B \neq B-A$
* $A-B$ యొక్క లాక్షణిక రూపము.

  $A-B = \{x/x \in A$ మరియు $x \notin B\}$
* $A \cap B = \phi$ అయితే $A-B = A$
* $A \cap B = \phi$ అయితే $B-A = B$
* $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
* $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

సమితుల సౌష్ఠవ భేదము (Symmetric Difference of Sets) : $(A-B) \cup (B-A)$ సమితి A సమితికో లేక B సమితికో చెంది ఉమ్మడి మూలకాలు కలిగి ఉండని సమితి. ఇట్టి సమితిని A, B సమితుల "సౌష్ఠవ బేధము" అంటారు. దీనిని $A \Delta B$ చే సూచిస్తాము.

* $A \Delta B = (A-B) \cup (B-A)$
* A, B లు ఏవేని రెండు సమితులు అయితే

  $\{A-B\} \cup \{B-A\} = (A \cup B) - (A \cap B)$
* $A \cup \mu = \mu$ (లేదా) $A \cup U = U$
* $A \cap \mu = A$
* $A \cup \phi = A$
* $A \cap \phi = \phi$
* $A \cap A = A$
* $A \cup A = A$
* $A \cap B = A-B^1$

  $= B-A^1$
* $A^1-B^1 = B-A$

  అనగా $A^1-B^1 = \{x/x \in A^1$ మరియు $x \notin B^1\}$
* $A \cup B = \phi$ అయితే $A = \phi$ మరియు $B = \phi$

* $A \cap B = \phi$ అయితే $A \subset B^1$ మరియు $B \subset A^1$
* A శూన్య సమితి అయితే $A = \{x/x \neq x\}$
* $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$
* $A-(A-B) = A \cap B$
* $A-(B \cup C) = (A-B) \cap (A-C)$
* $A-(B \cap C) = (A-B) \cup (A-C)$

డీమోర్గాన్ న్యాయాలు (De Morgan's Laws) :

(i) $(A \cup B)^1 = A^1 \cap B^1$

(ii) $(A \cap B)^1 = A^1 \cup B^1$

* $\phi^1 = \mu$
* $\mu^1 = \phi$
* $A \cap \mu = A$
* $A \cap \phi = \phi$
* $(A^1)^1 = A$
* $A \cap A^1 = \phi$
* $A \cup A^1 = \mu$
* A, B, C లు మూడు పరిమిత సమితులు అయితే

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$$

* A, Bలు రెండు పరిమిత సమితులు అయితే,

    (i) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

    (ii) $n(A) + n(B) = n(A \cup B) + n(A \cap B)$

* $n(A \cup B \cup C) + n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A)$

$$= n(A) + n(B) + n(C) + n(A \cap B \cap C)$$

సమితులపై ద్వైత్వ నియమము (Principle of duality for Sets) : సమితుల సమానత్వాన్ని సూచించే ఏ నియమంలోనైనా $\cup$, $\cap$ మరియు ϕ, μ లను తారుమారు చేయగా వచ్చే నియమం కూడా నిజమే. దీన్నే సమితులపై "ద్వైత్వనియమం" అంటారు.

క్రమ సంఖ్య	నియమము	సమితుల బీజగణితము
1	అపవర్తిత నియమము	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
2	సహచర న్యాయాలు	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
3	వినిమయ న్యాయాలు	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
4	విభాగ న్యాయాలు	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
5	తత్సమ న్యాయాలు	$A \cup \phi = A$ $A \cap \mu = A$
6	పూరక న్యాయాలు	$A \cup A^1 = \mu; A \cap A^1 = \phi$ $\left(A^1\right)^1 = A; \mu^1 = \phi ; \phi^1 = \mu$
7	డీమోర్గాన్ న్యాయాలు	$(A \cup B)^1 = A^1 \cap B^1$ $(A \cap B)^1 = A^1 \cup B^1$

* * *

33. సంబంధాలు
(Relations)

క్రమయుగ్మము (Ordered Pair) : క్రమానికి ప్రాధాన్యత గల జతలను "క్రమ యుగ్మము" అని అంటారు.

* ప్రత్యేక క్రమములో అమర్చిన మూలకాల జత (a, b) ని ఒక క్రమయుగ్మము అంటారు.

* క్రమ యుగ్మము (a, b) నందు a, b అను రెండు మూలకాలు కలవు.

  a అనునది మొదటి మూలకము.

  b అనునది రెండవ మూలకము.

* (a, b) క్రమ యుగ్మములో మొదటి మూలకము a ను ప్రథమ నిరూపకము అని; రెండవ మూలకము b ను ద్వితీయ నిరూపకము అని అంటారు.

క్రమయుగ్మాల ధర్మాలు (Laws of Ordered Pair) :

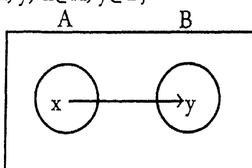
(i) $(a, b) \neq (b, a)$

(ii) $(a, b) = (c, d)$ అయితే $a = c; b = d$.

సమితుల కార్టీసియన్ లబ్ధము (Cartesian Product of Sets) :

A, B అనేవి రెండు సమితులు. A నుండి ప్రథమ నిరూపకాన్ని; B నుండి ద్వితీయ నిరూపకాన్ని తీసుకొని వ్రాయడానికి వీలైన క్రమ యుగ్మాలన్ని కలిసియున్న సమితిని A, B సమితుల "కార్టీసియన్ లబ్ధ సమితి" అని అంటారు. దీనిని "A×B" చే సూచిస్తాము.

* $A \times B = \{(x, y) / x \in A; y \in B\}$



* $A \times B \neq B \times A$

* $n(A) = l; n(B) = m$ అయితే $n(A \times B) = lm$ అగును.

* A, B లలో ఒకటి అపరిమితము; రెండోది శూన్యేతరము అయితే $A\times B$ అపరిమితము.

* A కాని; B కాని శూన్యసమితి అయితే $A\times B$ కూడా శూన్య సమితియే.

* కార్టీసియన్ లబ్ధ సమితిని

  (i) బాణ చిత్రాల ద్వారా;

  (ii) వృక్ష చిత్రాల ద్వారా;

  (iii) రేఖా చిత్రాల ద్వారా సూచించవచ్చు.

యుగ్మ సంబంధము (Specific Relation) **:** రెండు వస్తువులు ఏ విధంగా జతపరచబడి యున్నవో తెలియజేసే సంబంధాలను "యుగ్మ సంబంధాలు" అంటారు.

ఉదా : = ; < ; > ; || ; ^ ; ~ మొదలైనవి యుగ్మ సంబంధాలు.

వివరణ : $a = b$ అనే సంబంధము సమానత్వాన్ని తెలియజేస్తుంది.

* సంబంధము అనేది క్రమయుగ్మాల సమితి.

ఉదా : $a>b$ అనే సంబంధాన్ని R తో సూచిస్తే, $(a, b)\in R$

* A, B, C లు మూడు సమితులు అయితే

(i) $A\times(B\cup C) = (A\times B) \cup (A\times C)$

(ii) $A\times(B\cap C) = (A\times B) \cap (A\times C)$

(iii) $(A\cup B)\times C = (A\times B) \cup (A\times C)$

(iv) $(A\cap B)xC = (A\times C) \cap (B\times C)$

అనగా

(i) సమితుల కార్టీసియన్ లబ్ధము సమితుల సమ్మేళనంపై కుడి, ఎడమ విభాగ న్యాయాలను పాటిస్తుంది.

(ii) సమితుల కార్టీసియన్ లబ్ధము సమితుల ఛేదనముపై కూడా కుడి, ఎడమ విభాగ న్యాయాలను పాటిస్తుంది.

* A, B, C లకు

(i) $A\times(B-C) = (A\times B) - (A\times C)$

(ii) $(A-B)\times C = (A\times C) - (B\times C)$ అగును.

* A; B లు రెండు పరిమిత సమితులు అయితే
  $n(A\times B) = n(A)\times n(B)$.

సంబంధము (Relation) : క్రమయుగ్మాలు మూలకాలుగా కల్గిన సమితులను "సంబంధాలు" అంటారు.

* సంబంధం అనేది క్రమయుగ్మాలను కలిగియున్న ఒక సమితి. క్రమయుగ్మాల సమితి ఏదైనను ఒక సంబంధమే. దీన్ని "R" తో సూచిస్తాము.

* A నుండి B కి ఒక సంబంధము R అయితే $R \subset A \times B$.

* $A \times B$ యొక్క ప్రతి ఉపసమితి A నుండి B కి ఒక సంబంధము.

* A లోని మూలకాల సంఖ్య "m"; B లోని మూలకాల సంఖ్య "n" అయితే $A \times B$ లోని మూలకాల సంఖ్య "$m \times n$".

* A లోని మూలకాల సంఖ్య "m", B లోని మూలకాల సంఖ్య "n". అయితే A నుండి B కి గల సంబంధాల సంఖ్య $= 2^{mn}$.

* రెండు సమితుల కార్టీసియన్ లబ్ధము యొక్క ఉపసమితిని "సంబంధము" అని నిర్వచిస్తాము.

* ప్రతి క్రమయుగ్మంలో మూలకాలు ఏ విధమైన సంబంధాన్ని కలిగి యున్నవో తెలిపే ధర్మాన్ని సంబంధము తెలిపే సూత్రము అని అంటారు.

సంబంధము యొక్క ప్రదేశము; వ్యాప్తి
(Domain and Range of a Relation) :

ఒక సంబంధంలోని అన్ని క్రమయుగ్మాలలోని ప్రథమ నిరూకములన్నింటిని కలిగిన సమితిని ఆ సంబంధపు "ప్రదేశము" అనీ; ద్వితీయ నిరూపకములన్నింటిని కలిగియున్న సమితిని ఆ సంబంధపు "వ్యాప్తి" అని అంటారు.

ఉదా : $R = \{(1,2); (2,3); (3,4); (7,9)\}$ ఒక సంబంధమైన,

R ప్రదేశము $= \{1,2,3,7\}$

R వ్యాప్తి $= \{2,34,9\}$.

వివరణ : R అనేది "సమానముగా ఉన్నది" అనే సంబంధాన్ని సూచిస్తే;

aRb అనగా a, b కి సమానం అని అర్థం.

bRa అనగా b, a కి సమానం అని అర్థం.

* aRb; bRa లు వేరువేరు కావచ్చును.

విలోమ సంబంధము (Inverse Relation) : A నుండి B కి R ఒక సంబంధము. R లోని ప్రతి క్రమయుగ్మంలోని ప్రథమ; ద్వితీయ నిరూపకాలను తారుమారు చేయడంవల్ల B నుండి A కి ఒక క్రొత్త సంబంధం వస్తుంది. ఈ సంబంధాన్ని R యొక్క విలోమ సంబంధము అంటారు.

* R యొక్క విలోమ సంబంధాన్ని "R^{-1}" తో సూచిస్తాము.

* $(x, y) \in R$ అయితే $(y, x) \in R^{-1}$ అగును.

* $R^{-1} = \{(y, x)/(x, y) \in R\}$

ఉదా : సమితి $A = \{2,3,4\}$ లో

$R = \{(2,3); (2,4); (3,4); (4,3); (3,2); (4,2)\}$ ఒక సంబంధము.

అయితే $R^{-1} = \{(3,2); (4,2); (4,3); (3,4); (2,3); (2,4)\}$

గమనిక :

(i) R^{-1} యొక్క ప్రదేశము; వ్యాప్తి వరుసగా R యొక్క వ్యాప్తి; ప్రదేశములు అవుతాయి.

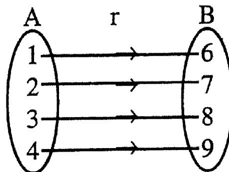
(ii) వాస్తవ సంఖ్యా సమితిలో R అనేది "తక్కువగా ఉన్నది" అనే సంబంధాన్ని తెలిపితే;

R^{-1} అనేది "ఎక్కువగా ఉన్నది" అనే సంబంధాన్ని తెలుపుతుంది.

సంబంధములో రకములు (Types of the Relations) :

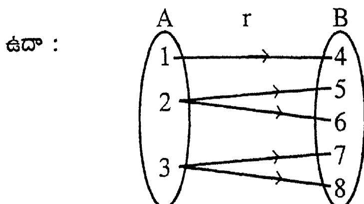
1. అన్వేక సంబంధము (One - One Relation) : $r:A \to B$ అను సంబంధములో సమితి A లోని ఒక మూలకము; సమితి B లోని ఒకే ఒక మూలకముతో సంబంధము కలిగి యున్నట్లైతే ఆ సంబంధాన్ని "అన్వేక సంబంధము" అని అంటారు.

ఉదా :



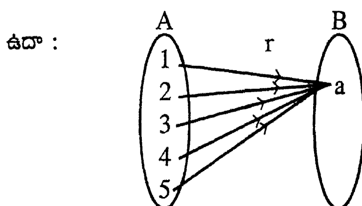
2. ఏక-బహు సంబంధము (One-many Relation) : $r: A \to B$ అను సంబంధములో సమితి A లోని ఒక మూలకము, సమితి B లోని ఒకటి కంటె ఎక్కువ మూలకాలతో సంబంధము కలిగి యున్నట్లయితే ఆ సంబంధాన్ని "ఏక-బాహు సంబంధము" అని అంటారు.

ఉదా :



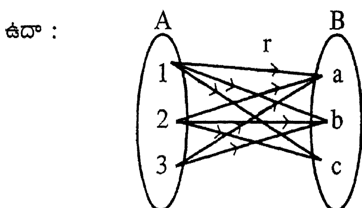
3. బహు -ఏక సంబంధము (Many-One Relation) : $r: A \to B$ అను సంబంధములో సమితి A లోని ఒకటి కంటే ఎక్కువ మూలకాలు, సమితి B లోని ఒకే ఒక మూలకంతో సంబంధం కలిగి ఉన్నట్లయితే ఆ సంబంధాన్ని "బహు-ఏక సంబంధం" అని అంటారు.

ఉదా :



4. బహు-బహు సంబంధము (Many-Many Relation) : $r: A \to B$ అను సంబంధంలో సమితి A లోని అన్ని మూలకాలు, సమితి B లోని అన్ని మూలకాలతో సంబంధము కలిగి ఉన్నట్లయితే ఆ సంబంధాన్ని "బహు-బహు సంబంధము" అని అంటారు.

ఉదా :



* ఏదేని సమితి A లో ఒక సంబంధము R అయితే $\left(R^{-1}\right)^{-1} = R$.

సంబంధాలలోని రకాలు (Types of Relation) : R అనేది సమితి A నుండి A కి సంబంధమైతే R ని A లో సంబంధం అని అంటారు. అనగా R, A లో ఒక సంబంధం అంటే $R \subset A \times A$

1. పరావర్తన సంబంధము (Reflexive Relation) : $R \subset A \times A$ అవుతూ, ప్రతి $a \in A$ కి $(a, a) \in R$ అయ్యే సంబంధాన్ని A లో పరావర్తన సంబంధం అంటారు.

అనగా A లోని ప్రతి మూలకము దానికదే ఇచ్చిన సంబంధాన్ని కలిగి ఉంటే, ఆ సంబంధాన్ని "పరావర్తన సంబంధం" అని అంటారు.

2. సౌష్ఠవ సంబంధము (Symmetric Relation) : R, A లో ఒక సంబంధము. $(a, b) \in R$ అయినప్పుడల్లా $(b, a) \in R$ అయినచో R ని సౌష్ఠవ సంబంధము అంటారు.

3. ప్రతి సౌష్ఠవ సంబంధము (Anti-Symmetric Relation) : A లో ఒక సంబంధము R. $(a, b) \in R$ మరియు $(b, a) \in R$ అయినప్పుడల్లా $a=b$ అయినచో R ని "ప్రతి సౌష్ఠవ సంబంధము" అని అంటారు.

గమనిక : ఒక సమితిలో ప్రతి పరావర్తన సంబంధము ప్రతి సౌష్ఠవ సంబంధము అవుతుంది. కాని విపర్యయం నిజం కాదు. అనగా ఒక సమితిలో ప్రతి సౌష్ఠవ సంబంధము; పరావర్తనము కానవసరము లేదు.

4. సంక్రమణ సంబంధము (Transitive Relation) : A లో ఒక సంబంధము R. $(a, b) \in R$ మరియు $(b, c) \in R$ అయినప్పుడల్లా $(a, c) \in R$ అయినచో R ని "సంక్రమణ సంబంధము" అని అంటారు.

5. తుల్య సంబంధము (Equivalence Relation) : సమితి A లోని ఒక సంబంధము R (i) పరావర్తనము; (ii) సౌష్ఠవము; (iii) సంక్రమణం అయితే R ను "తుల్య సంబంధము" అని అంటారు.

సంబంధాలు - ప్రమేయాలు (Relations - Functions) : A, B లు రెండు సమితులు. f, A నుండి B కి ఒక సంబంధము. A లోని ప్రతి మూలకము B లోని ఒకే ఒక మూలకముతో జతపరచబడే క్రమయుగ్మాలను మాత్రమే f కలిగియుంటే, f ని A నుండి B కి ఒక ప్రమేయము అంటారు.

* f, A నుండి B కి ప్రమేయము అంటే,

(i) $f \subset A \times B$ మరియు

ప్రతి $a \in A$ కి $(a, b) \in f$ అయ్యేట్లు ఒకే ఒక మూలకము $b \in B$ ఉంటుంది అని అర్థము.

* f, A నుండి B కి ప్రమేయము అయితే; $f: A \rightarrow B$ అని గానీ, $A \xrightarrow{f} B$ అని గాని వ్రాస్తాము.

$f: A \rightarrow B$ ని f, A ను B లోకి ప్రతిసర్జనం చేస్తుంది అంటాం. f, A ను B లోకి మార్పు చేస్తుందని కూడా అంటాం.

* $f: A \rightarrow B$ ప్రమేయము $(a, b) \in f$ అయితే $f(a)=b$ అని వ్రాస్తాము. f(a) ను a కి ప్రతిబింబము అని అంటాము.

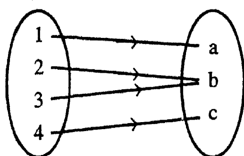
* $f: A \rightarrow B$ అనే ప్రమేయంలో A ని ప్రదేశము అనీ; B ని సహప్రదేశము అనీ అంటారు.

A లోని మూలకాలన్నింటి ప్రతిబింబాలు మాత్రమే మూలకాలుగా గల సమితిని f(A) తో సూచిస్తూ; f(A) ని f యొక్క "వ్యాప్తి" అని అంటారు.

* $f: A \rightarrow B$ ప్రమేయంలో $f:(A) \subset B$.

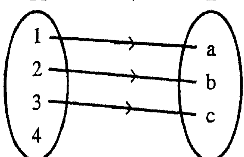
గమనిక : ప్రతి ప్రమేయము, ఒక ప్రత్యేక ధర్మాన్ని కలిగిన సంబంధమే. ప్రతి సంబంధమూ ప్రమేయము కానవసరంలేదు.

ఉదా :

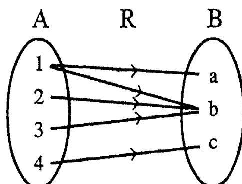


ఇచ్చట R, A నుండి B కి ఒక ప్రమేయం అగును.

ఉదా :



ఇచ్చట R అనునది సంబంధం మాత్రమే, ప్రమేయం కాదు.



ఉదా : ఇచ్చట R అనునది సంబంధం మాత్రమే ప్రమేయం కాదు.

* * *

34. ప్రమేయాలు
(Functions)

ప్రమేయం నిర్వచనము (Definition of a Function) : A నుండి B కి ఒక సంబంధము f, క్రింది నియమాన్ని ధృవపరిస్తే అట్టి సంబంధాన్ని "ప్రమేయము" అంటారు.

* "ప్రతి $a \in A$ కి అనుగుణంగా $(a,b) \in f$ అయ్యేట్లు ఏకైక మూలకం $b \in B$ ఉంటుంది."

(లేదా)

$f:A \to B$ కి ప్రమేయము అంటే

(i) ప్రతి $a \in A$ కి అనుగుణంగా $(a, b) \in f$ అయ్యేట్లు $b \in B$ ఉంటుంది. మరియు

(ii) f లోని ఏ రెండు విభిన్న క్రమయుగ్మాలకు ఒకే మొదటి మూలకము ఉండకూడదు.

గమనిక : $f:A \to B$ ఒక ప్రమేయము మరియు $(a, b) \in f$ అయితే b ని f దృష్ట్యా a యొక్క ప్రతిబింబము అంటారు. దీనిని $f(a) = b$ అని వ్రాస్తాము.

* $\{f(a):a \in A\}$ అనే సమితి f యొక్క వ్యాప్తి. దీనిని f(a) తో సూచిస్తాము.

  అనగా f వ్యాప్తి $= f(A) = \{f(a):a \in A\}$

  వ్యాప్తి f అనునది A లోని మూలకాల ప్రతిబింబాల సమితి.

* వ్యాప్తి మూలకాలు ఉన్న సమితి B ని సహప్రదేశము అంటారు.

ప్రమేయాల రకాలు (Types of the Functions) :

1.అన్వేక ప్రమేయము (One-One Function) :

ప్రమేయము $f:A \to B$ దృష్ట్యా A లోని విభిన్న మూలకాలకు విభిన్న ప్రతిబింబాలుంటే f ను "అన్వేక ప్రమేయము" అంటారు. అనగా $x_1, x_2 \in A; x_1 \neq x_2$ **అయితే** $f(x_1) \neq f(x_2)$ అన్నమాట.

* $f:A \to B$ ఒక అన్వేక ప్రమేయము

  $\Leftrightarrow$ $[x_1, x_2 \in A; x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)]$

  $\Leftrightarrow$ $[f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2]$

2. సంగ్రస్త ప్రమేయము (Onto Function) :

ప్రమేయం $f:A \to B$ యొక్క వ్యాప్తి $f(A)$; B కి సమానము అయితే f ను "సంగ్రస్త ప్రమేయము" అంటారు. అంటే f సంగ్రస్త ప్రమేయము కావలెనన్న B లోని ప్రతి మూలకము కనీసము A లోని ఒక మూలకానికైనా ప్రతి బింబము కావలెను.

* $f A \to B$ ఒక సంగ్రస్త ప్రమేయము

$\Leftrightarrow$ ప్రతి $y \in B$ కి అనుగుణంగా $f(x) = y$ అయ్యేట్లు కనీసము ఒక మూలకము $x \in A$ ఉంటుంది.

$\Leftrightarrow$ $f(A) = B$.

3. అంతః ప్రమేయము (Into Function) :

ప్రమేయము $f:A \to B$ యొక్క $f(A)$; B కి క్రమ ఉపసమితి అయితే f ను "అంతః ప్రమేయము" అంటారు.

* $f:A \to B$ కి అంతః ప్రమేయము

$\Leftrightarrow$ ప్రతి $y \in B$ కి అనుగుణంగా $f(x) = y$ అయ్యేటట్లు కనీసం ఒక మూలకం $x \in A$ ఉంటుంది.

$\Leftrightarrow$ $f(A) \subset B$.

4. ద్విగుణ ప్రమేయము లేదా అన్వేక సంగ్రస్త ప్రమేయము (Bijective Function (or) One-One onto Function) :

ప్రమేయం $f:A \to B$ అన్వేకము; సంగ్రస్తము కూడా అయితే f ను "ద్విగుణ ప్రమేయము" అంటారు.

ప్రమేయపు విలోమము (Inverse of a Function) : f అనే ప్రమేయంలోని క్రమయుగ్మాల ప్రథమ, ద్వితీయ నిరూపకాలను తారుమారు చేయడంవల్ల లభించే సంబంధమును f విలోమము అంటారు. దీనిని f^{-1} తో సూచిస్తాము.

$f^{-1} = \{(y, x) / (x, y) \in f\}$

గమనిక : $f:A \to B$ ప్రమేయమయితే f విలోమము $f^{-1}:B \to A$ ప్రమేయము కానవసరము లేదు.

* $f:A \to B$ ద్విగుణ ప్రమేయము అయితే $f^{-1}:B \to A$ కూడా ప్రమేయము.

విలోమ ప్రమేయము (Inverse Function) : $f:A \to B$ ఒక ద్విగుణ ప్రమేయం అయితే, $f^{-1}:B \to A$ ఒక ప్రమేయము అవుతుంది. దీనినే f విలోమ ప్రమేయము అంటారు.

* $f:A \to B$ కి ఒక ప్రమేయము అయితే, $y \in B$ కి $f^{-1}(y)$ లో ఒక మూలకము (లేదా) ఒకటి కంటే ఎక్కువ మూలకాలు (లేదా) అసలు మూలకాలే లేకపోవచ్చు.

కాని $f:A \to B$ ద్విగుణ ప్రమేయము అయినప్పుడు ప్రతి $y \in B$ కి అనుగుణంగా $f(x)=y$ అయ్యేట్లు ఏకైక మూలకము $x \in A$ ఉంటుంది.

కావున ఈ సందర్భములో ప్రతి $y \in B$కి అనుగుణంగా $f^{-1}(y) \in A$ అయ్యేట్లు ఏకైక మూలకము $f^{-1}(y)$ ఉంటుంది.

తత్సమ ప్రమేయము (Identity Function) : $f:A \to A$, ప్రమేయం $f(x)=x$ " అయ్యేట్లుంటే f ను A పై "తత్సమ ప్రమేయము" అని అంటారు. దీనిని "I_A" తో సూచిస్తాము.

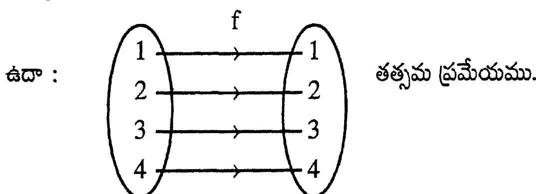
* I_A, A పై తత్సమ ప్రమేయము.

  $\Leftrightarrow$ $I_A(x) = x$ " $x \in A$

* ప్రమేయము $f:A \to A$ లోని మూలకాలు (x, x); " $x \in A$ మాత్రమే అయితే f ను A పై "తత్సమ ప్రమేయము" అంటారు.

* ప్రతి తత్సమ ప్రమేయంf, ద్విగుణ ప్రమేయము అవుతుంది. దాని విలోమ ప్రమేయము $f^{-1} = f$.

ఉదా :

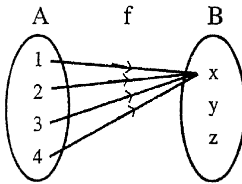


తత్సమ ప్రమేయము.

స్థిర ప్రమేయము (Constant Function) :

ప్రమేయము $f:A \to B$, $f(x) = c$ " $x \in A$ అయ్యేట్లు $c \in B$ వ్యవస్థితమైతే f ను స్థిర ప్రమేయము అంటారు. అనగా f వ్యాప్తిలో ఒకే ఒక మూలకము ఉంటే, f ఒక స్థిర ప్రమేయము అవుతుంది.

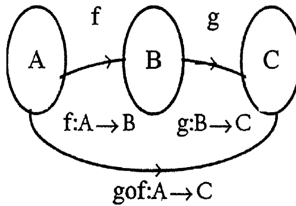
ఉదా :



$f:A \to B$ అనునది స్థిర ప్రమేయము.

సమాన ప్రమేయము (Equal Function) : ఒకే ప్రదేశము D పై నిర్వచితమైన ప్రమేయాలు f; g లు $f(x) = g(x)$; ∀ $x \in D$ అయ్యేట్లుంటే అట్టి ప్రమేయాలను "సమాన ప్రమేయాలు" అంటారు. ఈ సందర్భములో $f = g$ తో సూచిస్తాము.

సంయుక్త ప్రమేయము (Composite Function) : $f:A \to B$; $g:B \to C$ రెండు ప్రమేయాలైతే f:g ల సంయుక్త ప్రమేయమును gof తో సూచిస్తూ $gof:A \to C$; $gof(x)=g[f(x)]$ ∀ $x \in A$ గా నిర్వచిస్తాము. అనగా f, g ల సంయుక్త ప్రమేయం gof; A నుండి C కి $gof(x)=g[f(x)]$ ∀ $x \in A$ చే నిర్వచితమైన ఓ ప్రమేయం.



గమనిక : సంయుక్త ప్రమేయం gof లో

(i) f యొక్క సహ ప్రదేశము; g యొక్క ప్రదేశానికి సమానము.

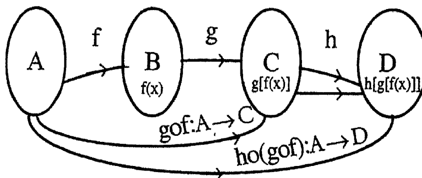
(ii) gof యొక్క ప్రదేశము; f యొక్క ప్రదేశానికి సమానం.

(iii) gof; g ల సహ ప్రదేశాలు ఒకటే.

(iv) $(gof)(x) = g[f(x)]$

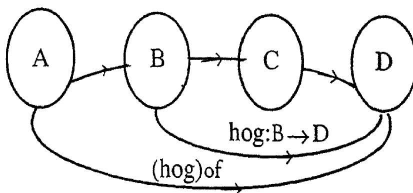
* సాధారణంగా $fog \neq gof$.

*



$f:A \to B$; $g:B \to C$ మరియు $h:C \to D$ ప్రమేయాలు. అప్పుడు $gof:A \to C$ ప్రమేయం; $h:C \to D$ ప్రమేయం కాబట్టి; gof; h ల సంయుక్త ప్రమేయం $ho(gof):A \to D$, $[ho(gof)(x) = h[g(f(x))]$ " $x \in A$ చే నిర్వచితము.

ఇదే విధంగా



g, h ల సంయుక్త ప్రమేయము $hog:B \to D$

$f:A \to B$ కి ప్రమేయం కాబట్టి f, hog ల సంయుక్త ప్రమేయము $(hog)of:A \to D$. క్రింది విధంగా నిర్వచితము

$$[(hog)of](x) = (hog)[f(x)]$$

$$= h[g(f(x))] \text{ " } x \in A$$

* $f:A \to B$; $g:B \to C$; $h:C \to D$ ప్రమేయాలైతే $ho(gof) = (hog)of$.

గమనిక : (hog)of మరియు ho(gof) ప్రమేయాలలో

(i) రెండింటికీ ఒకే ప్రదేశము A.

(ii) రెండింటికి ఒకే సహప్రదేశము D.

(iii) ప్రతి $x \in A$; రెండు ప్రమేయాల దృష్ట్యా ప్రతిబింబాలు

$$h[g(f(x))]$$

(iv) $(hog)of = ho(gof)$.

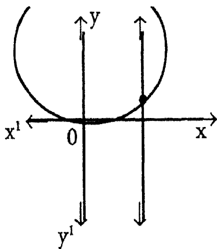
వాస్తవ మూల్య ప్రమేయము (Real Valued Function) : $f:A \to B$ ఒక ప్రమేయమయితే, $f \subseteq A \times B$ అవుతుంది. నిజానికి $f = \{(a, f(a)):a \in A\}$

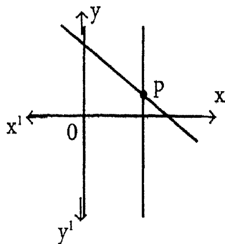
ప్రమేయం $f:A \to B$ నకు $B \subseteq R$ అయితే f ను "వాస్తవమూల్య ప్రమేయము" అంటారు. మరియు A, B లు రెండూ R కి ఉపసమితులైతే f ను వాస్తవ సంఖ్య చలరాశిలో "వాస్తవ మూల్య ప్రమేయము" అంటారు.

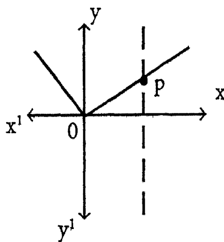
గమనిక : ప్రమేయం $f:A \rightarrow B$ వాస్తవ చలరాశిలో వాస్తవ మూల్య ప్రమేయం అయితే $f = \{(a, f(a)) : a \in A\}$ లోని క్రమయుగ్మాల ప్రథమ; ద్వితీయ నిరూపకాలు వాస్తవ సంఖ్యలే.

గమనిక : ఒక రేఖా చిత్రం ప్రమేయాన్ని సూచించవలెనన్న; y - అక్షానికి సమాంతరంగా ఉన్న ఏ సరళరేఖ రేఖా చిత్రాన్ని ఒకటి కంటె ఎక్కువ బిందువులలో ఖండించరాదు.

ఉదా :







* * *

35. శ్రేఢులు
(Progressions)

* సహజ సంఖ్యల వర్గాల మొత్తానికి సూత్రమును చెప్పినది "ఆర్కిమిడీస్"
* ఆర్యభట్టు గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు సహజ సంఖ్యల వర్గముల మొత్తానికి, ఘనాల మొత్తానికి సూత్రాన్ని కనుగొనెను.
* సాధారణ శ్రేణి యొక్క వరుస పదాలను $t_1, t_2, t_3,....$ లతో సూచిస్తాము.

అంకశ్రేఢి (Arithmetic Progression) : మొదటి పదాలు తప్ప, మిగిలిన పదాలు, ఒక స్థిర సంఖ్యను ముందు పదానికి కలుపగా ఏర్పడే శ్రేణిని "అంకశ్రేఢి" అని అంటారు.

అంకశ్రేఢిని సంక్షిప్తంగా A.P. తో సూచిస్తాము.

(లేదా)

మొదటి పదము మినహా మిగిలిన పదములన్ని దాని పూర్వపదానికి ఒక స్థిరసంఖ్యను కలుపగా ఏర్పడిన సంఖ్యల వరుసలను (శ్రేఢులను) "అంకశ్రేఢులు" లేదా "అంకశ్రేణులు" అని అంటారు.

ఈ కలుపబడిన స్థిరసంఖ్యను "సామాన్య భేదము" లేదా "పదాంతరము" అంటారు.

గమనిక : సాధారణంగా అంకశ్రేఢిలోని మొదటి పదాన్ని 'a' తోను, పదాంతరాన్ని 'd' తోను సూచిస్తాము.

* మొదటి పదము 'a'; పదాంతరము 'd' గా గల అంకశ్రేఢి a, a+d, a+2d, a+3d,...... రూపంలో ఉండును.
* A.P. లో మొదటి పదము t_1; మరియు పదాంతరము 'd' అయితే

  $t_2 = t_1+d; t_3 = t_2+d;$............
* $t_{n+1} = t_n+d \ (n>1)$
* ఒక అంకశ్రేఢిలో మొదటి పదము 'a'; పదాంతరము 'd' అయితే అంకశ్రేఢి యొక్క n వ పదము (లేదా) సామాన్య పదము $t_n = a+(n-1)d$.
* అంకశ్రేఢిలోని మొదటి n పదాల మొత్తము.

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

* అంకశ్రేఢిలోని మొదటి పదము 'a'; చివరి పదము 'l' అయితే ఆ శ్రేఢి యొక్క 'n' పదాల మొత్తము

$$S_n = \frac{n}{2}(a+l)$$

అంకమధ్యమము (Arithmetic Mean) : మూడు సంఖ్యలు అంకశ్రేఢిలోనున్న మధ్య పదమును ఆ రెండు రాశుల అంకమధ్యమము (A.M.) అంటారు.

* a, b అను రెండు రాశుల అంకమధ్యమము $= \frac{a+b}{2}$

* a, b, c లు అంకశ్రేఢి (A.P.) లో ఉన్న $b = \frac{a+c}{2}$ అగును.

* మొదటి 'n' సహజ సంఖ్యల మొత్తము

అనగా $1 + 2 + 3 + \dots\dots + n = Sn = \frac{n(n+1)}{2}$

* మొదటి 'n' సహజ సంఖ్యల వర్గముల మొత్తము

అనగా $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots\dots + n^2 = Sn^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

* మొదటి 'n' సహజ సంఖ్యల ఘనముల మొత్తము

అనగా $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots\dots + n^3 = Sn^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

గమనిక : $Sn^3 = (Sn)^2$

* $a, x_1, x_2, x_3, \dots\dots, x_n$, b లు A.P. లో ఉన్నచో $x_1, x_2, x_3, \dots\dots, x_n$ లను a, b ల మధ్యగల అంకమధ్యమములు అందురు. మరియు $d = \frac{b-a}{n+1}$

గుణశ్రేఢి (Geometric Progression) : మొదటి పదము తప్ప ప్రతి పదము దానికి ముందునున్న పదాన్ని ఒక స్థిర సంఖ్యతో (0 కాని) గుణించడం వల్ల ఏర్పడు శ్రేణిని "గుణశ్రేఢి" అని అంటారు.

(లేదా)

ప్రతి పదము (మొదటి పదము తప్ప), దానికి ముందున్న పదానికి ఒక స్థిర నిష్పత్తిలోనున్న శ్రేఢిని "గుణశ్రేఢి" అంటారు. ఈ స్థిర నిష్పత్తిని సామాన్య నిష్పత్తి అంటారు.

* గుణశ్రేఢిని సంక్షిప్తంగా G.P.తో సూచిస్తాము.

* మొదటి పదము a; సామాన్య నిష్పత్తి r అయిన గుణశ్రేఢి $a, ar, ar^2, ...$ రూపంలో ఉండును.

* గుణశ్రేఢి (G.P.) లో $t_n = r.t_{n-1}$ $(r \neq 0)$

* $r = \frac{t_n}{t_{n-1}}$ (సామాన్య నిష్పత్తి)

* గుణశ్రేఢిలో సామాన్య n నిష్పత్తి $r = \frac{t_2}{t_1} = \frac{t_3}{t_2} = ...$

* గుణశ్రేఢిలో మొదటి పదము 'a'; సామాన్య నిష్పత్తి 'r' అయితే n వ పదము $t_n = ar^{n-1}$.

గుణమధ్యమము (Geometric Mean) : a, b, c లు గుణశ్రేఢిలో నున్న 'b' ని a, c ల గుణమధ్యమము అని అంటారు.

* a, b, c లు గుణశ్రేఢిలో ఉంటే $b^2 = ac$ (లేదా) $b = \sqrt{ac}$.

* p, q ల గుణమధ్యమము $= \sqrt{pq}$.

* గుణశ్రేఢిలోని మొదటి 'n' పదాల మొత్తము

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{(r - 1)} \text{ (r>1 అయినప్పుడు)}$$

$$= \frac{a(1 - r^n)}{(1 - r)} \text{ (r<1 అయినప్పుడు)}$$

* గుణశ్రేఢిలోని అనంతపదాల మొత్తము $S_\infty = \frac{a}{1-r}$

(ఇచ్చట a = మొదటి పదము, r = సామాన్య నిష్పత్తి)

* a, b, c లు అంకశ్రేఢిలో ఉంటే, $K^a; K^b; K^c$ లు గుణశ్రేఢి (G.P.) లో ఉంటాయి.

* గుణశ్రేఢిలో $r = \frac{t_n}{t_{n-1}}$ (లేదా) $r = \left(\frac{t_n}{a}\right)^{\frac{1}{n-1}}$

గమనిక :

(i) ఒక G.P. లో ప్రతి పదమును ఒక స్థిరసంఖ్యచే గుణించగా వచ్చు పదములు G.P. లో ఉండును.

(ii) ఒక G.P. లో ప్రతి పదమును ఒక స్థిర సంఖ్యచే భాగించగా వచ్చు పదములు G.P. లో ఉండును.

(iii) ఒక G.P. లో ప్రతి పదము ఒకే ఘాతమునకు పెంచిన వచ్చు శ్రేఢి G.P. అగును.

(iv) ఒక G.P. లో ప్రతి పదముల విలోమములతో ఏర్పడిన శ్రేఢి G.P. అగును.

హరాత్మక శ్రేఢి (Harmonic Progression) :

ఒక శ్రేఢిలోని ప్రతి పదము యొక్క విలోమములు అంకశ్రేఢిలో ఉన్న ఆ శ్రేఢిని "హరాత్మక శ్రేఢి" అని అంటారు.

* సాధారణంగా హరాత్మక శ్రేఢిలోని పదాలు

$\frac{1}{a}, \frac{1}{a+d}, \frac{1}{a+2d}, \ldots\ldots$ రూపంలో ఉంటాయి.

* హరాత్మక శ్రేఢి (H.P.) యొక్క n వ పదము $t_n = \frac{1}{a+(n-1)d}$.

గమనిక : హరాత్మక శ్రేఢిలోని మొదటి 'n' పదముల మొత్తమునకు నిర్దిష్టమగు సూత్రము ఏదీలేదు.

హరాత్మక మధ్యమము (Harmonic mena) :

a, b, c అనునవి హరాత్మక శ్రేఢిలో ఉంటే b ని a, cల హరాత్మక మధ్యమము అని అంటారు.

* a, c ల హరాత్మక మధ్యమము = $\frac{2ac}{a+c}$

* a, b, c లు H.P. లో ఉంటే $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ లు A.P. లో ఉంటాయి.

* a, b, c లు H.P. లో ఉంటే $b = \frac{2ac}{a+c}$

* రెండు ధనసంఖ్యల అంకమధ్యమము; గుణమధ్యమము; హరాత్మక మధ్యమములు గుణశ్రేఢిలో ఉంటాయి.

* a, b ల అంకమధ్యమము A; గుణమధ్యమము G; హరాత్మక మధ్యమము H అనుకొనిన $A = \frac{a+b}{2}$; $G = \sqrt{ab}$; $H = \frac{2ab}{a+b}$ అగును.

* రెండు సంఖ్యల అంకమధ్యమము; గుణమధ్యమము; హరాత్మక మధ్యమములు వరుసగా A; G; H లు అయితే $A.G. = H^2$ మరియు $A \geq G \geq H$ అగును.

* a, b ల మధ్య n అంకమధ్యమములు ఉండి; d పదాంతరము అయితే $d = \frac{b-a}{n+1}$ అగును.

* * *

36. సాంఖ్యక శాస్త్రము
(Statistics)

* సాంఖ్యక శాస్త్రాన్ని ఇంగ్లీషులో "స్టాటిస్టిక్సు" అంటారు.

* సాంఖ్యక శాస్త్ర పితామహుడు సర్ రోనాల్డ్ ఎ. ఫిషర్.

* 'స్టాటిస్టిక్సు' అన్న పదము "స్టాటస్" అనే లాటిన్ పదము నుండి లేక "స్టాటిస్టా" అనే ఇటాలియన్ పదం నుంచి లేక "స్టాటిస్టిక్" అనే గ్రీకు పదము నుండి ఉత్పన్నం అయింది. ఈ పదాలకు "రాజ్యము" అని అర్థము.

* సాంఖ్యక శాస్త్రము దత్తాంశ సేకరణ; విశ్లేషణ; వివరణలకు తోడ్పడు చున్నది.

దత్తాంశ ప్రదర్శన (Presentation of Data) : బృహద్దత్తాంశాన్ని తగిన విధంగా సంక్షిప్తపరచి పట్టికల రూపంలోను; చిత్రపటాల రూపంలోను ప్రదర్శిస్తే వాటి ద్వారా పరిశోధన చేసే విషయం గురించి కొన్ని సంబంధిత నిర్ణయాలు తీసుకోవటానికి సాధ్యమవుతుంది. ఇట్టి పద్ధతిని "దత్తాంశ ప్రదర్శన" అంటారు.

పట చిత్రములు (Pictograms) : సంఖ్యలలో ఇవ్వబడ్డ విషయాలను బొమ్మల ద్వారా చూపించే చిత్రాలను "పట చిత్రాలు" అంటారు.

కమ్మ చిత్రములు లేక దిమ్మ చిత్రాలు (Bar Diagrams or Bar Graphs) : దత్తాంశములోని అంశాలను కమ్మలు లేక దీర్ఘ చతురస్రాల (దిమ్మలు) రూపంలో చూపుతూ గీచిన చిత్రాన్ని "కమ్మ రేఖా చిత్రము" లేక "దిమ్మ రేఖాచిత్రము" అంటారు.

వృత్తరేఖా చిత్రము (Pie Diagram) : ఒక వృత్తాన్ని దత్తాంశాన్ని సూచించడానికి వీలుగా కొన్ని సెక్టారులుగా విభజిస్తే ఏర్పడే చిత్రాన్ని "వృత్త రేఖా చిత్రము" అంటారు.

దీనిని కోణీయ రేఖాచిత్రము లేక చక్రియ రేఖా చిత్రము అనికూడా అంటారు.

గమనిక : దత్తాంశములోని వివిధ భాగాల విలువలను పోల్చడానికి ఈ చిత్రం ఉపయోగపడుతుంది.

సాంఖ్యకశాస్త్రం నిర్వచనం (Defination of Statistics) : దత్తాంశ సేకరణ; వర్గీకరణ; వ్యాఖ్యానాలతో కూడిన గణితశాస్త్ర విభాగాన్ని "సాంఖ్యక శాస్త్రం" అంటారు.

పౌనఃపున్యపట్టిక (లేదా) పౌనఃపున్య విభాజనము

(Frequency Table or Frequency Distribution) : దత్తాంశాన్ని అనువగు రీతిలో వర్గీకరించి పట్టికలలో తెలియజేసిన దానిని "పౌనఃపున్యపట్టిక" లేక "పౌనఃపున్య విభాజనము" అంటారు.

పౌనఃపున్యము (Frequency) : దత్తాంశాన్ని పౌనఃపున్య పట్టికలలో చూపినప్పుడు ఒక్కొక్క తరగతిలో ఎన్ని వివరాలుండునో తెలుపు సంఖ్యను ఆ తరగతి "పౌనః పున్యము" అంటారు.

తరగతి అవధులు (Class Limits) : ప్రతి తరగతి ఆద్యంతాలను ఆ తరగతి యొక్క దిగువ అవధి (Lower Limit) అని; ఎగువ అవధి (Upper Limit) అని అంటారు.

తరగతి హద్దులు (Class Boundaries) : ఒక తరగతి ఎగువ అవధి; తరువాత తరగతి దిగువ అవధుల సరాసరిని ఆ తరగతి ఎగువ హద్దు లేక యదార్థ ఎగువ హద్దు అందురు.

గమనిక : ఒక తరగతి యదార్థ ఎగువ హద్దు; ఆ తరువాత తరగతి యదార్థ దిగువ హద్దు అవుతుంది.

తరగతి అంతరము (Class Interval) : ఒక తరగతి ఎగువ హద్దు; దిగువ హద్దుల తేడాను ఆ తరగతి అంతరము (లేక) తరగతి అంతరం పొడవు అందురు.

(లేదా)

రెండు వరుస తరగతుల దిగువ హద్దుల తేడా లేదా ఎగువ హద్దుల తేడా తరగతి అంతరం అవుతుంది.

వ్యాప్తి (Range) : దత్తాంశములో గరిష్ఠ; కనిష్ఠ విలువల భేదాన్ని ఆ దత్తాంశపు "వ్యాప్తి" అందురు.

అవిచ్ఛిన్న చలరాశి మరియు అవిచ్ఛిన్న దత్తాంశము

(Continuous Variable and Continuous Data) :

ఒక దత్తాంశములోని చలరాశి కొన్ని ప్రత్యేక హద్దుల మధ్య ఏ విలువనైనా తీసుకోగలిగితే ఆ చలరాశిని "అవిచ్ఛిన్న చలరాశి" అంటారు.

అవిచ్ఛిన్న చలరాశికి చెందిన దత్తాంశాన్ని "అవిచ్ఛిన్న దత్తాంశము" అంటారు.

విచ్ఛిన్న చలరాశి మరియు విచ్ఛిన్న దత్తాంశము

(Discrete Variable and Discrete Data) :

ఒక దత్తాంశానికి చెందిన చలరాశి కొన్ని నిశ్చిత సంఖ్యలను మాత్రమే విలువలుగా తీసుకోగలిగితే అట్టి చలరాశిని "విచ్ఛిన్న చలరాశి" అంటారు.

విచ్ఛిన్న చలరాశికి చెందిన దత్తాంశాన్ని "విచ్ఛిన్న దత్తాంశము" అందురు.

విలీన తరగతులు (Inclusive Classes) : 0–9; 10–19; 20–29;.....వంటి తరగతులను "విలీన తరగతులు" అని అంటారు.

మినహాయింపు తరగతులు (Exclusive Classes) : 0–10; 10–20; 20–30;.....వంటి తరగతులను "మినహాయింపు తరగతులు" అని అంటారు.

మినహాయింపు తరగతుల హద్దులు ఆయా తరగతుల యదార్థపు హద్దులను సూచించును.

ఒక మినహాయింపు తరగతులు గల పౌనఃపున్య విభాజనములో ప్రతి తరగతి ఎగువహద్దు; దిగువ హద్దుల తేడా ఆ విభాజనం తరగతి అంతరాన్ని సూచించును.

ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యము (Less than Cumulative Frequency):

ఒక పౌనఃపున్య విభాజనంలో మొదటి నుండి ఒక తరగతి ఎగువ హద్దు వరకు ఉండే పౌనఃపున్యాల మొత్తాన్ని, ఆ తరగతి ఎగువ హద్దు వరకు ఉండే "ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యము" అంటారు.

ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య విభాజనము (Less than cumulative frequency distribution) : ఒక పౌనఃపున్య విభాజనానికి చెందిన తరగతుల ఎగువ హద్దులు వీటికి సంబంధించిన ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యాలు సూచించే పట్టికను "ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య విభాజనము" అంటారు.

అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యము

(Greater than Cumulative Frequency):

ఒక పౌనఃపున్య విభాజనంలో చివరి నుండి ఒక తరగతి దిగువ హద్దు వరకు ఉండే పౌనఃపున్యాల మొత్తాన్ని, "అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యము" అంటారు. (లేదా)

ఒక తరగతి యదార్ధ దిగువ హద్దు కంటె ఎక్కువ పరిమాణము కలిగిన మొత్తం పౌనఃపున్యాన్ని "అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యము" అంటారు.

అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య విభాజనము :
(Greater than Cumulative Frequency Distribution):

ఒక పౌనఃపున్య విభజనానికి చెందిన తరగతుల దిగువ హద్దులు; వీటికి సంబంధించిన అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యాలు సూచించే పట్టికను "అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య విభాజనము" అంటారు.

గమనిక : సాధారణంగా పౌనఃపున్య విభాజనంలో కేవలం ఆయా తరగతులలోని పౌనఃపున్యాల స్వభావాన్ని మాత్రమే పరిశీలించగలం కొన్ని సందర్భాలలో దత్తాంశములోని ఏదైనా ఒక విలువకంటె ఎక్కువ లేదా తక్కువ పరిమాణము కలిగిన మొత్తం పౌనఃపున్యాల సంఖ్యను తెలుసుకోవలసిన అవసరం కలుగుతుంది. ఇటువంటి సందర్భాలలో "సంచిత పౌనఃపున్య విభాజనాలు" ఉపయోగపడుతాయి.

సంచిత పౌనఃపున్య విభాజనాలు రెండు రకాలు :

1. ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య విభాజనము.
2. అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య విభాజనము.

సోపాన చిత్రము (Histogram): ఒక దత్తాంశ పౌనఃపున్య విభాజనంలోని తరగతుల యదార్ధ హద్దులు x - అక్షంపై; వాటికి సంబంధించిన పౌనఃపున్యాలు y - అక్షంపై తీసుకొని నిర్మించిన ఆసన్న దీర్ఘ చతురస్రాల రేఖా చిత్రాన్ని "సోపాన చిత్రము" అని అంటారు.

* సోపాన చిత్రంలో తరగతి అంతరం వెడల్పుగాను; పౌనఃపున్యం పొడవుగాను తీసుకోవాలి.
* సోపాన చిత్రంలో దీర్ఘ చతుస్రాల వైశాల్యాలు అనురూప తరగతుల పౌనః పున్యాలు అనులోమానుపాతంలో ఉంటాయి.

పౌనఃపున్య బహుభుజి (Frequency Polygon): ఒక దత్తాంశపు పౌనఃపున్య విభాజనంలోని తరగతుల మధ్య బిందువులు వాటి అనురూప పౌనఃపున్యాలకు సంబంధించిన బిందువులను గుర్తించి, ఆ బిందువులను సరళరేఖలతో కలుపగా ఏర్పడు రేఖా చిత్రాన్ని "పౌనఃపున్య బహుభుజి" అంటారు.

పౌనఃపున్య వక్రము (Frequency Curve): ఒక దత్తాంశపు పౌనఃపున్య విభాజనంలోని తరగతుల మధ్య బిందువులు వాటి అనురూప పౌనఃపున్యాలకు

సంబంధించిన బిందువులను గుర్తించి, ఆ బిందువులను నున్నని వక్రంతో కలుపగా ఏర్పడు రేఖా చిత్రాన్ని "పౌనఃపున్య వక్రము" అంటారు.

సంచిత పౌనఃపున్య వక్రము (Cumulative Frequency Curve): ఒక దత్తాంశపు పౌనఃపున్య విభాజనంలోని తరగతుల హద్దులు, వాటి అనురూప సంచిత పౌనఃపున్యాలకు సంబంధించిన బిందువులను గుర్తించి, ఆ బిందువులను నున్నని వక్రంతో కలుపగా ఏర్పడు రేఖా చిత్రాన్ని "సంచిత పౌనఃపున్య వక్రము" అంటారు.

* ఒక పౌనఃపున్య విభాజనానికి చెందిన ప్రతి తరగతిలోని పౌనఃపున్యమంతా, ఆ తరగతి మధ్యవిలువ వద్ద కేంద్రీకృతమవుతుంది.

ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య వక్రము

(Less than Cumulative Frequency Curve):

తరగతుల ఎగువ హద్దులు, తదనుగుణంగా ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యాలతో ఏర్పడు వక్రాన్ని "ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య వక్రము" అంటారు.

అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య వక్రము

(Greater than Cumulative Frequency Curve):

తరగతుల దిగువ హద్దులు, తదనుగుణంగా అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యాలతో ఏర్పడు వక్రాన్ని "అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య వక్రము" అంటారు.

అంకగణితపు సగటు లేక సగటు అనునది తరచుగా మరియు విస్తృతంగా ఉపయోగించు కేంద్రస్థానపు కొలతలలో ఒకటి.

వర్గీకరింపబడని అంశములిచ్చిన అంకగణితపు సగటు (A.M.)

(Mean of the Ungrouped Data):

ఇవ్వబడిన సాంఖ్యక దత్తాంశముల యొక్క మొత్తమును వాని సంఖ్యచే భాగించగా వచ్చు భాగఫలమును "అంకగణిత సగటు" అంటారు.

* $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots, x_n$ లు ఇవ్వబడిన n అంశములయిన

$$A.M. = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots\ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

(లేదా)

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

గమనిక : $\bar{x}$ కన్న x లోని కొన్ని విలువలు ఎక్కువగాను, మరికొన్ని తక్కువగాను ఉంటాయి.

$x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$ అను n అంశముల పౌనఃపున్యములు వరుసగా $f_1, f_2, f_3, \ldots\ldots, f_n$ లు అయితే

$$\text{అంకగణిత సగటు } \bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots\ldots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \ldots\ldots + f_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_ix_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

అనగా $\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{\sum fx}{n}$ (N = Sf అనగా పౌనఃపున్యాల మొత్తము)

వెయిటెడ్ అంకగణిత సగటు (Weighted Arithmetic Mean):
$x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$ సంఖ్యలకు, వాని వానికి కల్పించబడిన ప్రాధాన్యతను అనుసరించి weighting factors $w_1, w_2, w_3, \ldots\ldots, w_n$ లు అయితే

$$\bar{x} = \frac{w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 + \ldots\ldots + w_nx_n}{w_1 + w_2 + w_3 + \ldots\ldots + w_n} = \frac{\sum wx}{\sum w}$$

అనగా $\bar{x} = \frac{\sum wx}{\sum w}$ ని వెయిటెడ్ అంకగణిత సగటు అంటారు.

వర్గీకరింపబడిన అంశముల సగటు (Mean of a Grouped Data): పౌనః పున్య వర్గీకరణలో ఒక చరరాశి x కి 'n' పరిశీలనాలకు K తరగతులు ఉన్న, x_i మధ్య విలువ; f_i, i వ తరగతి పౌనఃపున్యము అయితే

$$\text{సగటు } \bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + \ldots\ldots + f_kx_k}{f_1 + f_2 + f_3 + \ldots\ldots + f_k} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_ix_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$

అనగా $\bar{x} = \frac{\sum f_ix_i}{n}$ (ఇచ్చట $N = \sum_{i=1}^{k} f_i$)

* వర్గీకరింపబడిన అంశములలో ప్రతి తరగతి పౌనఃపున్యము మధ్య విలువపై కేంద్రీకరింపబడి ఉండును.

గమనిక : పౌనఃపున్యము పెద్ద సంఖ్య అయినచో గణించుట కఠినము. ప్రతి తరగతి అంతరము సమానమయినప్పుడే సగటును కనుగొనుటకు క్రింది పద్ధతిని ఉపయోగిస్తాము.

$$\bar{x} = A + \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{k} f_i u_i\right) \times C$$

A = మధ్య విలువల నుండి ప్రతిపాదింపబడిన ఒక విలువ

C = తరగతి అంతరము

K = పౌనఃపున్య విభాజనములోని తరగతుల సంఖ్య.

$u_i = \frac{x_i - A}{C}$; i = 1, 2, 3,.......,k మరియు u_i = i వ తరగతి మధ్య విలువ.

N = పౌనఃపున్యముల మొత్తము = $\sum_{i=1}^{k} f_i$

మధ్యగతము (Median) **:** ఆరోహణ క్రమములోగాని, అవరోహణ క్రమంలోగాని, వర్గీకృతము కాని దత్తాంశములోని విలువలను వ్రాసిన వానిలో సరిగ్గా మధ్య విలువను "మధ్యగతము" అని అంటారు.

గమనిక : ఇవ్వబడిన దత్తాంశములో n విలువలున్నచో

(i) n బేసిసంఖ్య అయినచో $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ స్థానములోని విలువ "మధ్యగత" అగును. ఈ సందర్భములో మధ్యగత ఒకే విలువను కలిగి ఉండును.

(ii) n సరిసంఖ్య అయినచో $\left(\frac{n}{2}\right)$; $\left(\frac{n+2}{2}\right)$ స్థానములలో రెండింటి యొక్క సగటు విలువ "మధ్యగతము" అగును.

గమనిక :

(i) దత్తాంశము అత్యధిక మరియు అత్యల్ప విషయములు కలిగియున్నచో సగటు విలువలో చాలా మార్పు వచ్చును.

(ii) దత్తాంశములోని అత్యధిక లేక అత్యల్ప విలువల వల్ల మధ్యగతం ప్రభావితం కాదు.

వర్గీకరింపబడిన అంశముల మధ్యగతము (Median of a Grouped Data):

$$\text{మధ్యగతము (M)} = L + \frac{\left(\frac{N}{2} - F\right)}{f} \times C$$

ఇచ్చట

L = మధ్యగత తరగతి దిగువ హద్దు ($\frac{n}{2}$ వ విలువ గల తరగతి)

N = పౌనఃపున్యముల మొత్తము

F = మధ్యగత తరగతి ముందు తరగతి సంచిత పౌనఃపున్యము

f = మధ్యగత తరగతి పౌనఃపున్యము

C = తరగతి అంతరము.

బాహుళకము (Mode): ఏదైనా దత్తాంశములో తరచుగా వచ్చిన విలువను "బాహుళకము" అంటారు.

(లేదా)

దత్తాంశములో అన్నింటి కన్నా ఎక్కువ పౌనఃపున్యము గల అంశమును "బాహుళకము" అందురు.

దీనిని సాధారణముగా "Z" తో సూచిస్తాము.

ఏక బాహుళకము (Uni-Mode): ఒకే బాహుళకమును కలిగి ఉన్న దత్తాంశాన్ని "ఏక-బాహుళకం" అంటారు.

ద్వి బాహుళకము (Bi-Mode): రెండు బాహుళకములు ఉన్న దత్తాంశాన్ని "ద్విబాహుళకము" అంటారు.

బాహుళక తరగతి (Model Class): పౌనఃపున్య విభాజ్యంలో అత్యధిక పౌనః పున్యం కలిగిన తరగతిని "బాహుళక తరగతి" అంటారు.

* పౌనఃపున్య విభాజ్యము నందు బాహుళకము (Z) ను కనుగొనుటకు సూత్రము.

$$Z = L_1 + \frac{\Delta_1 C}{\Delta_1 + \Delta_2}$$

ఇచ్చట L_1 = బాహుళకక తరగతి దిగువ హద్దు

C = తరగతి అంతరము

$\Delta_1 = f - f_1$

$\Delta_2 = f - f_2$

f = బాహుళకక తరగతి పౌనఃపున్యము

f_1 = బాహుళకక తరగతి ముందు తరగతి పౌనఃపున్యము

f_2 = బాహుళకక తరగతి తరువాత తరగతి పౌనఃపున్యము.

అనగా

$$Z = L_1 + \frac{(f - f_1)C}{(f - f_1) + (f - f_2)}$$

(లేదా)

$$Z = L_1 + \frac{(f - f_1)C}{2f - (f_1 + f_2)}$$

అంకగణిత సగటు; మధ్యగతము మరియు బాహుళకముల మధ్య సంబంధము

(Empericalrelation among Mean; Median and Mode) :

అంకగణిత సగటు - బాహుళకము = 3 (అంకగణిత సగటు - మధ్యగతం)

(లేదా)

బాహుళకము = 3 × మధ్యగతము - 2 × సగటు

అనగా Mode = 3 Median - 2 Mean

* * *

37. మాత్రికలు
(Matrices)

* మాత్రికలను తొలిసారిగా ప్రవేశపెట్టిన వారు ఆంగ్ల గణిత శాస్త్రవేత్త అయిన ఆర్థర్ కాలే.

* కొన్ని సంఖ్యలను అడ్డువరుసలు; నిలువు వరుసలలో దీర్ఘచతురస్రాకారంలో అమరిస్తే అట్టి అమరికకు "మాత్రిక" అని పేరు పెట్టినవాడు జె.జె. సిల్వస్టర్ అను ఆంగ్ల గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు.

మాత్రిక (Matrix) : చతురస్రాకారం లేదా దీర్ఘ చతురస్రాకారంగా వరుసలలో మూలకాలను అమర్చగా వచ్చే అమరికను "మాత్రిక" అంటారు.

సాధారణంగా మూలకాలను సంఖ్యలకు పరిమితం చేస్తాము.

* మాత్రికలను సూచించుటకు (   ) అనే గుర్తు లేదా '( )' లను వాడుతాము.

* సాధారణంగా మాత్రికలను ఆంగ్లభాషలోని పెద్ద అక్షరాలు A, B, C,....... లతో మరియు వాటిలోని మూలకాలను ఆంగ్లభాషలోని చిన్న అక్షరాలు a, b, c,.......లతో సూచిస్తాము.

మాత్రిక తరగతి (లేదా) మాత్రికా పరిమాణము

(Order of the Matrix or Class of the Matrix) :

ఒక మాత్రికలోని అడ్డువరుసల సంఖ్య; నిలువువరుసల సంఖ్యను "మాత్రిక పరిమాణము" లేదా "మాత్రిక తరగతి" అందురు.

* m అడ్డు వరుసలు; n నిలువు వరుసలను కలిగియున్న మాత్రిక యొక్క తరగతిని m×n తో సూచిస్తాము.

ఉదా : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ మాత్రిక తరగతి 2×3.

చతురస్ర మాత్రిక (Square Matrix) : ఒక మాత్రికలోని అడ్డువరుసలు; నిలువు వరుసలు సమానంగా ఉంటే ఆ మాత్రికను "చతురస్ర మాత్రిక" అని అంటారు.

* m అడ్డు వరుసలు; m నిలువు వరుసలను కలిగియున్న చతురస్రమాత్రిక తరగతిని "m×m" లేదా "m"తో సూచిస్తాము.

ఉదా : $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}_{2\times 2}$; $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}_{3\times 3}$

దీర్ఘ చతురస్ర మాత్రిక (Rectangular Matrix) : ఒక మాత్రికలో అడ్డువరుసలు; నిలువు వరుసలు సమాన సంఖ్యలో లేకపోతే ఆ మాత్రికను "దీర్ఘ చతుస్ర మాత్రిక" అని అంటారు.

ఉదా : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}_{2\times 3}$; $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}_{3\times 2}$

పంక్తి మాత్రిక (Row Matrix) : ఒకే ఒక అడ్డువరుసను కలిగియున్న మాత్రికను "పంక్తి మాత్రిక" లేదా "అడ్డువరుస మాత్రిక" అంటారు.

ఉదా : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{1\times 3}$

* $1\times n$ తరగతి గల పంక్తి మాత్రికలో ఒక అడ్డువరుస; n నిలువువరుసలు ఉంటాయి.

దోంతి మాత్రిక (లేదా) నిలువు వరుస మాత్రిక (Column Matrix) : ఒకే ఒక నిలువు వరుస కలిగియున్న మాత్రికను "దోంతి మాత్రిక" లేదా "నిలువు వరుస మాత్రిక" అని అంటారు.

ఉదా : $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{3\times 1}$; $\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}_{2\times 1}$

* $m\times 1$ తరగతి గల దోంతి మాత్రికలో m అడ్డువరుసలు; 1 నిలువువరుస ఉంటాయి.

శూన్య మాత్రిక (Null Matrix) : ఒక మాత్రికలోని ప్రతి మూలకము సున్నా (0) అయితే ఆ మాత్రికను "శూన్య మాత్రిక" అని అంటారు.

దీనిని "0" తో సూచిస్తాము.

ఉదా : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ అనే 2×2 శూన్య మాత్రికను $0_{2\times2}$ తో సూచిస్తాము.

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ అనే 2×3 తరగతి శూన్య మాత్రికను $0_{2\times3}$ తో సూచిస్తాము.

సంఖ్యా మాత్రిక (Scalar Matrix) : ఒక చతురస్ర మాత్రికలోని ప్రధాన వికర్ణంలో అన్ని మూలకాలు సమానంగాను; మిగతా మూలకాలన్ని శూన్యాలుగాను ఉన్న ఆ మాత్రికను "సంఖ్యా మాత్రిక" అంటారు.

ఉదా : $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

తత్సమ మాత్రిక లేదా యూనిట్ మాత్రిక

(Identity Matrix or Unit Matrix) :

ఒక చతురస్ర మాత్రికలోని ప్రధాన వికర్ణములోని మూలకాలన్ని "1" కి సమానమై; మిగిలిన మూలకాలు సున్నాలయితే ఆ మాత్రికను "తత్సమ మాత్రిక" లేక "యూనిట్ మాత్రిక" అని అంటారు. దీనిని "I" తో సూచిస్తాము.

* n వ తరగతి తత్సమ మాత్రికను I_n తో సూచిస్తాము.

ఉదా : $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

మాత్రిక ప్రధాన వికర్ణము (Principal Diagonal Matrix) :

ఒక చతురస్ర మాత్రికలో మొదటి అడ్డువరుసలోని మొదటి మూలకము నుండి చివరి అడ్డువరుసలోని చివరి మూలకము వరకు పోయే వికర్ణాన్ని "ప్రధాన వికర్ణం" అని అంటారు.

ఉదా : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ అనే చతురస్ర మాత్రికలోని ప్రధాన వికర్ణంలోని మూలకాలు 1, 5, 9.

వ్యత్యయ మాత్రిక (Transpose of a Matrix) : ఒక మాత్రికలోని అడ్డువరుసలను నిలువు వరుసలుగాను, నిలువు వరుసలను అడ్డువరుసలుగాను మార్చి వ్రాయగా వచ్చిన మాత్రికను మొదటి మాత్రికకు "వ్యత్యయ మాత్రిక" అంటారు.

* A అనే మాత్రిక యొక్క వ్యత్యయ మాత్రికను A^T లేదా A^1 తో సూచిస్తాము.

ఉదా : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ అయితే $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ అగును.

మాత్రికల సమానత్వం (Equality of Matrices) : రెండు మాత్రికలు ఒకే తరగతిపై సదృశ మూలకాలు సమానమైతే ఆ మాత్రికలు సమానము. ఈ రెండు మాత్రికలను "సమ మాత్రికలు" లేక "సమాన మాత్రికలు" అని అంటారు.

* A, B లు సమ మాత్రికలు అయితే వీటిని A = B తో సూచిస్తాము.

ఉదా : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$;

$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $A = B; A \neq C$ అయితే అగును.

సౌష్ఠవ మాత్రిక (Symmetric Matrix) : ఒక మాత్రిక దాని వ్యత్యయ మాత్రికకు సమానం అయితే ఆ మాత్రికను "సౌష్ఠవ మాత్రిక" అని అంటారు.

* $A^T = A$ అయితే A సౌష్ఠవ మాత్రిక అవుతుంది.

అసౌష్ఠవ మాత్రిక (Skew Symmetric Matrix) : ఒక మాత్రిక యొక్క వ్యత్యయ మాత్రిక దాని సంకలన విలోమానికి సమానం అయితే ఆ మాత్రికను "అసౌష్ఠవ మాత్రిక" అని అంటారు.

* $A^T = -A$ అయితే A ను అసౌష్ఠవ మాత్రిక అందురు.

మాత్రికల సంకలనము - నిర్వచనము

(Defination of Addition of Matrices) : A+B చే సూచింపబడే A, B అనే రెండు మాత్రికల మొత్తం, A, B మాత్రికల యందలి సదృశ మూలకాల మొత్తాలు మూలకాలుగా గల మాత్రిక

(లేదా)

A, B లు ఒకే పరిమాణం గల రెండు మాత్రికలు. రెండు మాత్రికలను కలిపి నూతన మాత్రిక ఏర్పరిచే విధానాన్ని "మాత్రికల సంకలనము" అంటారు. దీనిని "A+B" తో సూచిస్తాము.

మాత్రికల సంకలన ధర్మాలు (Properties of Addition of Matrices) :

(i) **సంవృత ధర్మము** (Closure Property) : A, Bలు రెండు మాత్రికలు అయితే A+B కూడ ఒక మాత్రిక.

(ii) **స్థిత్యంతర ధర్మము** (Commutative Property) : మాత్రికల సంకలనము స్థిత్యంతర ధర్మాన్ని పాటిస్తాయి. అనగా; $A+B = B+A$.

(iii) **సహచర ధర్మము** (Associative Property) : మాత్రికల సంకలనము సహచర ధర్మాన్ని పాటిస్తాయి. A, B, C లు ఒకే పరిమాణం గల మూడు మాత్రికలు అయితే $(A+B)+C = A+(B+C)$.

(iv) **తత్సమ ధర్మము** (Identity Property) : మాత్రికల సంకలనము తత్సమ ధర్మాన్ని పాటిస్తాయి. $A+0 = 0+A=A$.

* మాత్రికల సంకలనములో '0' తత్సమ మాత్రిక.

(v) **విలోమ ధర్మము** (Inverse Property) : A మాత్రిక యొక్క సంకలన విలోమము "-A".

* $A+x = 0$ అయితే x ను A యొక్క సంకలన విలోమము అంటారు.

(vi) **విభాగ న్యాయము** (Distributive Property) : A, B లు ఒకే పరిమాణం గల రెండు మాత్రికలు మరియు l, m లు రెండు స్థిర సంఖ్యలు అయితే,

$$k(A+B) = kA + kB$$

$$(k+l)A = kA + lA.$$

గమనిక : మాత్రికల సంకలనము ఒక ఎబీలియన్ సమూహము.

* A, B లు ఒకే పరిమాణం గల రెండు మాత్రికలు అయి,

  A+B = 0 అయితే,

  A కు సంకలన విలోమము B

  B కు సంకలన విలోమము A అగును.

* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ మాత్రిక యొక్క సంకలన విలోమము =

  $\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$

మాత్రికల అదిశాలబ్ధము (లేదా) మాత్రికను సంఖ్యతో గుణించడము

(Scalar Product of a Matrix) :

ఒక మాత్రికను ఒక వాస్తవ సంఖ్యతో గుణిస్తే వచ్చే లబ్ధము ఆ మాత్రికలో ఉన్న ప్రతి మూలకాన్ని ఆ సంఖ్యతో గుణిస్తే వచ్చే మూలకాలు గల మాత్రికకు సమానము.

(లేదా)

A అనేది ఒక మాత్రిక, k ఒక వాస్తవ సంఖ్య అయితే kA చే సూచించబడే k, A ల లబ్ధము A యందలి మూలకాలకు k రెట్లుగా నున్న సదృశ మూలకాలు గల నూతన మాత్రిక.

* -A = (-1).A.

మాత్రికల వ్యవకలనము (Subtraction of Matrices) : A, B లు ఒకే తరగతి గల మాత్రికలైతే "A-B" ని A, B మాత్రికల వ్యవకలనము అంటారు.

* A-B ని మాత్రిక A; మాత్రిక -B ల మొత్తము అనికూడా నిర్వచిస్తాము.

* A-B = A+(-B).

గమనిక : A-B రావటానికి A లో ఉన్న మూలకాల నుండి B లో ఉన్న సదృశ మూలకాలను తీసివేయాలి.

* A-B ని A, B మాత్రికల భేదమని కూడా అందురు.

* $A-B \neq B-A$
* $(A+B)^T = A^T + B^T$
* $\left(A^T\right)^T = A$
* $(kA)^T = k.A^T$

మాత్రికల గుణకారము (Multiplication of Matrices) :

* A, B మాత్రికల గుణకారాన్ని $A \times B$ లేదా $A.B$ లేదా AB తో సూచిస్తాము.
* A లోని నిలువు వరుసల సంఖ్య B లోని అడ్డువరుసల సంఖ్యకు సమానము అయినప్పుడు A, B మాత్రికలను గుణించగలము.

గమనిక : A మాత్రిక యొక్క పరిమాణము $m \times p$;
B మాత్రిక యొక్క పరిమాణము $p \times n$ అయితే
AB మాత్రిక యొక్క పరిమాణము $m \times n$ అగును.

మాత్రికల గుణకాల ధర్మాలు

(Properties of Matrix Multiplication) :

(i) **సంవృత ధర్మము** (Closure Property) : మాత్రికల గుణకారము సంవృత న్యాయాన్ని పాటిస్తుంది.

A, B లు రెండు మాత్రికలు అయితే AB మాత్రికయే అగును. అనగా A, B ల లబ్ధము సంవృతము.

(ii) మాత్రికల గుణకారం సార్వత్రికంగా స్థిత్యంతర ధర్మాన్ని పాటించదు. అనగా $AB \neq BA$.

(iii) మాత్రికల గుణకారము సహచర ధర్మాన్ని పాటిస్తాయి. అనగా A, B, C లు ఏవేని మూడు మాత్రికలు అయితే, $(AB)C = A(BC)$.

* A అనే మాత్రికచే $AB = BA = A$ అయ్యే విధంగా అనే B మాత్రిక ఒకటి ఉంటుంది. B ని యూనిట్ మాత్రిక అంటారు. దీనిని "I" తో సూచిస్తాము.
* మాత్రికల గుణకారము తత్సమ ధర్మాన్ని పాటిస్తుంది.
  అనగా $A \times I = I \times A = A$
  ఇచ్చట I గుణకార తత్సమాంశము.
* మాత్రికల గుణకారం కుడి, ఎడమ విభాగ న్యాయాలను పాటిస్తుంది.

(i) $A(B+C) = AB + AC$

(ii) $(B+C)A = BA + CA$.

* A, B లు రెండు మాత్రికలు; $AB = 0$ అయితే A, B లలో ఏ ఒక్కటి కూడా శూన్య మాత్రిక కానక్కర్లేదు.

* $AC = BC; C \neq 0$ అయితే $A = B$ కానవసరంలేదు. అనగా మాత్రికలకు కొట్టివేత ధర్మము వర్తించదు.

* $A \times 0 = 0 \times A = 0$

* $(AB)^T = B^T . A^T$

మాత్రికా నిర్ధారకము (Determinant of a Matrix) : $a, b, c, d, \in R$

మరియు $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ అయితే (ad-bc) వాస్తవ సంఖ్యను A యొక్క నిర్ధారకము అంటారు. దీనిని "$|A|$" తో సూచిస్తాము.

అనగా $|A| = ad-bc$.

విలక్షణ లేదా అసాధారణ మాత్రిక (Singular Matrix) : నిర్ధారకము సున్నాగా గల చతురస్ర మాత్రికను "విలక్షణ మాత్రిక" లేదా "అసాధారణ మాత్రిక" అని అంటారు.

ఉదా : $\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

అవిలక్షణ మాత్రిక (లేదా) సాధారణ మాత్రిక (Non-Singular Matrix) : ఒక చతురస్ర మాత్రిక యొక్క నిర్ధారకము శూన్యేతరము అయితే, ఆ మాత్రికను "అవిలక్షణ మాత్రిక" లేదా "సాధారణ మాత్రిక" అని అంటారు.

ఉదా : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

మాత్రిక గుణన విలోమము (Multiplicative Inverse of a Matrix) : రెండు చతురస్ర మాత్రికలు A, B ల లబ్ధము $AB = I$ అయితే B ను A యొక్క గుణన విలోమము అంటారు. దీనిని $B = A^{-1}$ గా వ్రాస్తారు.

(లేదా)

A ఒక అవిలక్షణ మాత్రిక (Non-Singular) అయినప్పుడు A తో సమానమైన పరిమాణంతో $AB = BA = I$ ను తృప్తిపరిచే చతురస్ర మాత్రిక B ను, A యొక్క గుణన విలోమము అని అంటారు.

దీనిని $B = A^{-1}$ అని వ్రాస్తారు.

గమనిక : ఇచ్చుట యూనిట్ మాత్రిక I యొక్క పరిమాణము, దత్త మాత్రిక A, B ల పరిమాణంకు సమానము.

* $|A| = 0$ అయినప్పుడు A^{-1} వ్యవస్థితం కాదు.

* అవిలక్షణ మాత్రికలు మాత్రమే గుణన విలోమాన్ని కలిగి ఉంటాయి.

* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ యొక్క అనుబంధ మాత్రిక $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ అగును.

* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; $ad\text{-}bc = |A| \neq 0$ అయితే $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ అగును.

* $A.B = K.I$; $K \in R$; I తత్సమ మాత్రక అయితే $A^{-1} = \frac{1}{k}.B$ అగును.

* హెచ్చు సంఖ్యలోని అవ్యక్త రాశులతో కూడిన ఏకఘాత సమీకరణ వ్యవస్థను సాధించడానికి మాత్రికా విలోమపద్ధతిని వాడుతాము.

మాత్రిక విలోమ పద్ధతి (Matrix Inversion Method) : ఈ పద్ధతిలో ఇచ్చిన సమీకరణాల వ్యవస్థను, ముందుగా $AX = B$ అనే మాత్రికా సమీకరణ రూపంలో వ్యక్తపరుస్తాం.

ఈ మాత్రికా సమీకరణములో A ను గుణన మాత్రిక (Coefficient Matrix) అని; X ను చలరాశుల మాత్రిక (Veriable Matrix) అని; B ను స్థిర మాత్రిక (Constant Matrix) అని అంటారు.

* $ax+by = p; cx+dy = q$ సమీకరణాల మాత్రికారూపము

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

* $|A| \neq 0$ అయితే $AX = B$ యొక్క సాధన $X = A^{-1}.B$
* $ax+by = p ; cx+dy = q$ సమీకరణాల సాధన
* $x = \dfrac{dp - bq}{ad - bc} ; y = \dfrac{aq - cp}{ad - bc}$

క్రామర్ పద్ధతి (Cramer Rule) : $ax+by = p ; cx+dy = q$

సమీకరణాల మాత్రికా రూపము $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

పై సమీకరణము $AX = B$ రూపంలో కలదు.

$|A| \neq 0$ అయినప్పుడు ఇచ్చిన సమీకరణాల సాధన.

$x = \dfrac{|B_1|}{|A|} ; y = \dfrac{|B_2|}{|A|}$. ఇచ్చట $B_1 = \begin{pmatrix} p & b \\ q & d \end{pmatrix}; B_2 = \begin{pmatrix} a & p \\ c & q \end{pmatrix}$.

* * *

38. త్రికోణమితి
(Trigonometry)

* త్రికోణమితి (Trigonometry) అనే పదము గ్రీకు భాష నుండి పుట్టింది. గ్రీకుభాషలో "Trio" అనగా "మూడు"; "Gonia" అనగా "కోణము" మరియు "Metron" అనగా "మాపనము" లేదా "కొలత".

* త్రికోణమితి అనగా మూడు కోణాల కొలత.

త్రికోణమితి (Trigonometry) : ఒక త్రిభుజములోని మూడు కోణములు, మూడు భుజముల పరిమాణములతో నిర్వహించు శాస్త్ర విభాగము.

* త్రిభుజంలోని మూడు భుజాలను; మూడు కోణాలకు మధ్యగల సంబంధాలను హిప్పార్కస్ అనే గ్రీకు గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు ఏర్పరిచాడు.

* త్రికోణమితి త్రిభుజ సమస్యలను వైశ్లేషికంగా అధ్యనం చేసే శాస్త్రము.

* ఒక సరళరేఖ అంతరాళములోని కొన్న బిందువుల సమితి.

* విభజన బిందువుతో కూడా రేఖా భాగాన్ని ఒక కిరణం అంటారు.

* ఒక ఉమ్మడి అంత్య బిందువు కలిగిన రెండు కిరణాల సమ్మేళనాన్ని ఒక కోణం అంటారు. ఈ అంత్య బిందువును కోణ శీర్షం అనీ, కోణాన్ని చేసే కిరణాలను కోణభుజాలు అని అంటారు.

* ఒక లంబకోణము 90^0 కల కోణము.

* అల్ప కోణము అనగా 0^0, 90^0 ల మధ్య గల కోణము.

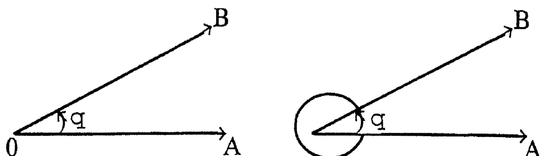
* అధిక కోణము 90^0 లకు 180^0 లకు మధ్యగల కోణము.

* ఒకోణము చేసిన తరువాత భ్రమణ కిరణము ఏ స్థానమున ఆగునో, ఆ కిరణాన్ని "అంతిమ కిరణము" అంటారు.

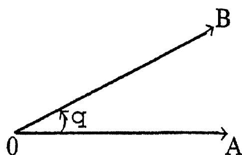
* అంతిమ కిరణము లేదా భుజము శీర్షము వద్ద ఒక సంపూర్ణ భ్రమణాన్ని పూర్తి చేసినచో, ఆ కోణం విలువ 360^0.

* ఏ భుజాన్ని బట్టి రభమణము జరుగునో, దీనిని "తొలి భుజం" కిరణం అంటారు.
* గడియారంలో ముళ్ళు ఏ దిశలో తిరుగునో, అదే దిశలో అంతిమ భుజం తిరుగుతున్నప్పుడు ఆ భ్రమణాన్ని సవ్య భ్రమణం అంటారు.
* అంతిమ భుజము, గడియారంలో ముళ్ళు తిరిగే దిశకు వ్యతిరేక దిశలో తిరుగుతున్నప్పుడు ఆ భ్రమణాన్ని "అపసవ్య భ్రమణం" అంటారు.

ఉదా :



(q కోణము సవ్య దిశలో ఉంది)



(q కోణము అపస్వదిశలో ఉంది)

* అంతిమ భుజము సవ్యదిశలో భ్రమణం చేస్తూ చేసిన కోణాన్ని సాంప్రదాయ ప్రకారం ధనాత్మక పరిమాణంగా తీసుకొంటారు. భ్రమణం అపసవ్య దిశలో తిరిగితే, అంతిమ భుజం చేసే కోణాన్ని సాంప్రదాయం ప్రకారం ఋణాత్మక పరిమాణంగా తీసుకొంటారు.
* చిన్న కోణాలను ముఖ్యంగా షష్ఠ్యంశమానము (ఆంగ్ల పద్ధతి); శతాంశమానము (ఫ్రెంచి పద్ధతి); రేడియన్ (వర్తుల) మానము లలో కొలుస్తాము.

డిగ్రీ (Degree) : తొలి భుజము నుంచి, అంతిమ భుజానికి ఏర్పడిన భ్రమణం ఒక సంపూర్ణ భ్రమణంలో 360 వ భాగము అయితే, ఆ కోణ ప్రమాణాన్ని ఒక "డిగ్రీ" అంటారు.

దీనిని "1^0" తో సూచిస్తాము.

షష్ఠ్యంశమానము (Sexagesimal System): ఈ పద్ధతిలో ఒక డిగ్రీని 60 సమాన భాగాలు చేసి ఒక్కొక్క భాగాన్ని 1 నిమిషము అంటారు. దీనిని $1'$ అని సూచిస్తారు. ప్రతి నిమిషాన్ని తిరిగి 60 సమాన భాగాలు చేసి, ప్రతి సమభాగాన్ని ఒక సెకండు అంటారు. దీనిని $1''$తో సూచిస్తాము. ఈ పద్ధతిని "షష్ఠ్యంశమానము" అంటారు.

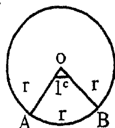
* $1^0 = 60'$; $1' = 60''$

శతాంశమానము (Centesimal system) : ఈ మానంలో ఒక లంబకోణాన్ని 100 సమభాగాలుగా చేసి, ఒక్కొక్క భాగాన్ని ఒక గ్రేడ్ (grade) అంటారు.

ఒక గ్రేడ్‌ను 1^g తో సూచిస్తాము.

రేడియన్ (Radian) : 0 కేంద్రముగా; r వ్యాసార్ధముతో ఒక వృత్తాన్ని తీసుకొందాం. వృత్త వ్యాసార్ధం (r) తో సమానమైన చాపాన్ని (arc) వృత్త పరిధిపై తీసుకుంటే, ఆ చాపం అదే వృత్తకేంద్రము వద్ద చేసే కోణాన్ని "ఒక రేడియన్" అంటారు.

ఈ కోణానికి శీర్షము, వృత్త కేంద్రము వద్ద ఉంటుంది.



రేడియన్ మానము (Radian measure): రేడియన్ అంటే ఒక కోణం కొలతకు ఒక ప్రమాణం. దీనిని 1^cతో సూచిస్తాము.

రేడియన్ మానాన్ని వర్తులమానం (Circular Measure) అనికూడా అంటారు.

* r వ్యాసార్ధము గల వృత్త పరిధి $2\pi r$ కు సమానము.
* వృత్తపరిధి; కేంద్రము వద్ద 2π రేడియన్ల ప్రమాణాల కోణాన్ని ఏర్పరచును.
* 2π రేడియన్లు = 360^0.

  π రేడియన్లు = 180^0; $\frac{\pi}{2} = 90^0$; $\frac{\pi}{4} = 45^0$; $\frac{\pi}{8} = 22\frac{1}{2}^0$.
* 1 రేడియన్ = $1^c = \frac{180^0}{\pi} = 57^0 16'$ (సుమారుగా)
* r పొడవు గల చాపము 1 రేడియన్ ప్రమాణం గల కోణాన్ని చేయడం వలన, 1 పొడవు గలిగిన చాపము $\frac{1}{r}$ రేడియన్ల ప్రమాణం గల కోణాన్ని చేస్తుంది.

* r వ్యాసార్థము గల వృత్తములో l పొడవు గల చాపము, కేంద్రము వద్ద θ కోణము చేస్తే; $\theta = \frac{l}{r}$ (లేదా) $l = r\theta$ (ఇచ్చట θ ను రేడియన్లలో సూచించాలి)

* $90^0 = 100^g$

* $\pi^c = 180^0$; $1^c = 57^0 16'$

* $1^g = 100'$; $1' = 100''$; $1^0 = 0.01746^c$

*

డిగ్రీలు	30^0	45^0	60^0	90^0	180^0	270^0	360^0
రేడియన్‌లు	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$3\frac{\pi}{2}$	2π

* **షష్ఠ్యంశమానము; శతాంశమానము; రేడియన్ మానముల మధ్యగల సంబంధము** (Relation Between Sexagesimal; Centesimal and Radian measure systems) :

$$\frac{D}{90} = \frac{G}{100} = \frac{C}{\pi/2}$$

ఇచ్చట D - డిగ్రీలను; G - గ్రేడ్‌లను; C - రేడియన్‌లను సూచిస్తాము.

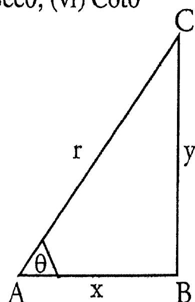
* $1^0 = \frac{\pi^c}{180}$

త్రికోణమితియ నిష్పత్తులు (Trigonometric Ratios) : త్రికోణమితియ నిష్పత్తులు ఆరు. అవి :

(i) Sinθ; (ii) Cosθ; (iii) Tanθ; (iv) Cscθ; (v) Secθ; (vi) Cotθ

త్రికోణమితియ నిష్పత్తుల నిర్వచనాలు

(Definations of Trigonometric Ratios) :



$\text{Sin}\theta = \text{Sin}\theta = \frac{y}{r} = \frac{\text{'θ' కు ఎదుటి భుజము}}{\text{కర్ణము}}$

$\text{Cosine}\theta = \text{Cos}\theta = \frac{x}{r} = \frac{\text{'θ' కు ఆసన్న భుజము}}{\text{కర్ణము}}$

$$\text{Tanget}\theta = \text{Tan}\theta = \frac{y}{x} = \frac{\text{‘}\theta\text{’ కు ఎదుటి భుజము}}{\text{‘}\theta\text{’ కు ఆసన్న భుజము}}$$

$$\text{Cosecant}\theta = \text{Csc}\theta = \frac{r}{y} = \frac{\text{కర్ణము}}{\text{‘}\theta\text{’ కు ఎదుటి భుజము}}$$

$$\text{Secant}\theta = \text{Sec}\theta = \frac{r}{x} = \frac{\text{కర్ణము}}{\text{‘}\theta\text{’ కు ఆసన్న భుజము}}$$

$$\text{Cotangent}\theta = \text{Cot}\theta = \frac{x}{y} = \frac{\text{‘}\theta\text{’ కు ఆసన్న భుజము}}{\text{‘}\theta\text{’ కు ఎదుటి భుజము}}$$

* త్రికోణమితియ నిష్పత్తులు ఒక లంబకోణ త్రిభుజంలోని భుజాల నిష్పత్తులను సూచిస్తాయి. కాబట్టి అవి వాస్తవ సంఖ్యలు.

* త్రికోణమితియ నిష్పత్తులు సదిశాఖండమగు (Radius Vector) $\overline{0p}$ పొడవు = $|\overline{0p}|$ పై ఆధారపడవు.

  ఇవి కేవలం ‘θ’ పరిమాణంపై మాత్రమే పరతంత్రమవుతాయి.

* త్రికోణమితి నిష్పత్తులన్ని ఒక నిర్ధిష్టకోణము ‘θ’ పరంగా (లేదా x పరంగా) నిర్వచించడమైంది. ఈ కారణం వల్ల Sine; Cosine; Tanget మొదలగునవి తమంతగా ఏ అర్థం కలిగి ఉండవు. (అర్ధవంతం కావు)

  ఇవి ఏద్దైనా θ లేదా x వంటి కోణంతో సహచర్యమైనప్పుడు మాత్రమే అర్ధవంతమవుతాయి.

త్రికోణమితియ నిష్పత్తుల మధ్యగల సంబంధము

(Relation between Trigonometric Ratios) :

(i) $\text{Sin}\theta \times \text{Csc}\theta = 1$

$$\text{Sin}\theta = \frac{1}{\text{Csc}\theta} \; ; \text{Csc}\theta = \frac{1}{\text{Sin}\theta}$$

(ii) $\text{Tan}\theta \times \text{Cot}\theta = 1$

$$\text{Tan}\theta = \frac{1}{\text{Cot}\theta} \; ; \text{Cot}\theta = \frac{1}{\text{Tan}\theta}$$

(iii) $\text{Cos}\theta \times \text{Sec}\theta = 1$

$$\text{Cos}\theta = \frac{1}{\text{Sec}\theta}\ ;\ \text{Sec}\theta = \frac{1}{\text{Cos}\theta}$$

(iv) $\text{Tan}\theta = \frac{\text{Sin}\theta}{\text{Cos}\theta}\ ;\ \text{Cot}\theta = \frac{\text{Cos}\theta}{\text{Sin}\theta}$

సర్వసమీకరణము (Identity) : ఒకటి లేదా ఎక్కువ చలరాశులు గల సమీకరణములో, చలరాశులు తీసుకోగల అన్ని విలువలకు ఆ సమీకరణం తృప్తి చెందుతున్నట్లయితే,ఆ సమీకరణాన్ని "సర్వ సమీకరణము" అంటారు.

త్రికోణమితి సర్వసమీకరణాలు :

(i) $\text{Sin}^2\theta + \text{Cos}^2\theta = 1$

$\text{Sin}^2\theta = 1 - \text{Cos}^2\theta$

$\text{Cos}^2\theta = 1 - \text{Sin}^2\theta$

$\text{Sin}\theta = \pm\sqrt{1 - \text{Cos}^2\theta}$

$\text{Cos}\theta = \pm\sqrt{1 - \text{Sin}^2\theta}$

(ii) $\text{Sec}^2\theta - \text{Tan}^2\theta = 1$

$$\text{Sec}\theta + \text{Tan}\theta = \frac{1}{\text{Sec}\theta - \text{Tan}\theta}$$

$$\text{Sec}\theta - \text{Tan}\theta = \frac{1}{\text{Sec}\theta + \text{Tan}\theta}$$

$\text{Csc}^2\theta = 1 + \text{Cot}^2\theta$ మరియు $\text{Csc}\theta = \pm\sqrt{1 + \text{Cot}^2\theta}$

$\text{Cot}^2\theta = \text{Csc}^2\theta - 1$ మరియు $\text{Cot}\theta = \pm\sqrt{\text{Csc}^2\theta - 1}$

* సర్వ సమీకరణాలు $\text{Sin}^2\theta + \text{Cos}^2\theta = 1$; $\text{Sec}^2\theta - \text{Tan}^2\theta = 1$ మరియు $\text{Csc}^2\theta - \text{Cot}^2\theta = 1$ లను "పైథాగోరియన్ సర్వసమీకరణాలు" అంటారు.

* త్రికోణమితి సర్వసమీకరణాలు, ప్రమేయాలు మధ్య సంబంధాలను తెలియజేస్తాయి.

త్రికోణ నిష్పత్తులన్నింటిని ఒకే నిష్పత్తిలో తెలుపుట.

(i) త్రికోణమితి నిష్పత్తులను $Sin\theta$లో తెలుపుట.

$Sin\theta$

$$Cos\theta = \sqrt{1 - Sin^2\theta}$$

$$Tan\theta = \frac{Sin\theta}{\sqrt{1 - Sin^2\theta}}$$

$$Csc\theta = \frac{1}{Sin \quad \theta}$$

$$Sec\theta = \frac{1}{\sqrt{1 - Sin^2\theta}}$$

$$Cot\theta = \frac{\sqrt{1 - Sin^2\theta}}{Sin\theta}$$

(ii) త్రికోణమితి నిష్పత్తులను $Cos\theta$ లో తెలుపుట.

$$Sin\theta = \sqrt{1 - Cos^2\theta}$$

$Cos\theta$

$$Tan\theta = \frac{\sqrt{1 - Cos^2\theta}}{Cos\theta}$$

$$Csc\theta = \frac{1}{\sqrt{1 - Cos^2\theta}}$$

$$Sec\theta = \frac{1}{Cos\theta}$$

$$Cot\theta = \frac{Cos\theta}{\sqrt{1 - Cos^2\theta}}$$

(iii) త్రికోణమితి నిష్పత్తులను $\text{Tan}\theta$ లో తెలుపుట.

$$\text{Sin}\theta = \text{Cos}\theta.\text{Tan}\theta = \frac{\text{Tan}\theta}{\sqrt{1+\text{Tan}^2\theta}}$$

$$\text{Cos}\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\text{Tan}^2\theta}}$$

$$\text{Tan}\theta =$$

$$\text{Csc}\theta = \frac{\sqrt{1+\text{Tan}^2\theta}}{\text{Tan}\theta}$$

$$\text{Sec}\theta = \sqrt{1+\text{Tan}^2\theta}$$

$$\text{Cot}\theta = \frac{1}{\text{Tan}\theta}$$

(iv) త్రికోణమితి నిష్పత్తులను $\text{Csc}\theta$ లో తెలుపుట.

$$\text{Sin}\theta = \frac{1}{\text{Csc}\theta}$$

$$\text{Cos}\theta = \frac{\text{Sin}\theta}{\text{Tan}\theta} = \frac{\sqrt{\text{Csc}^2\theta - 1}}{\text{Csc}\theta}$$

$$\text{Tan}\theta = \frac{1}{\sqrt{\text{Csc}^2\theta - 1}}$$

$$\text{Csc}\theta$$

$$\text{Sec}\theta = \frac{\text{Csc}\theta}{\sqrt{\text{Csc}^2\theta - 1}}$$

$$\text{Cot}\theta = \sqrt{\text{Csc}^2\theta - 1}$$

(v) త్రికోణమితి నిష్పత్తులను $Sec\theta$ లో తెలుపుట.

$$Sin\theta = \frac{\sqrt{Sec^2\theta - 1}}{Sec\theta}$$

$$Cos\theta = \frac{1}{Sec\theta}$$

$$Tan\theta = \sqrt{Sec^2\theta - 1}$$

$$Csc\theta = \frac{Sec\theta}{\sqrt{Sec^2\theta - 1}}$$

$Sec\theta$

$$Cot\theta = \frac{1}{\sqrt{Sec^2\theta - 1}}$$

(vi) త్రికోణమితి నిష్పత్తులను $Cot\theta$ లో తెలుపుట.

$$Sin\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + Cot^2\theta}}$$

$$Cos\theta = \frac{Sin\theta}{Tan\theta} = \frac{Cot\theta}{\sqrt{1 + Cot^2\theta}}$$

$$Tan\theta = \frac{1}{Cot\theta}$$

$$Csc\theta = \sqrt{1 + Cot^2\theta}$$

$$Sec\theta = \frac{\sqrt{1 + Cot^2\theta}}{Cot\theta}$$

$Cot\theta$

* $Sin(A+B) = SinA.CosB + CosA.SinB$

$Sin(A-B) = SinA.CosB - CosA.SinB$

$Cos(A+B) = CosA.CosB - SinA.SinB$

$Cos(A-B) = CosA.CosB + SinA.SinB$

$$\mathrm{Tan}(A+B) = \frac{\mathrm{Tan}A + \mathrm{Tan}B}{1 - \mathrm{Tan}A.\mathrm{Tan}B}$$

$$\mathrm{Tan}(A-B) = \frac{\mathrm{Tan}A - \mathrm{Tan}B}{1 + \mathrm{Tan}A.\mathrm{Tan}B}$$

$$\mathrm{Cot}(A+B) = \frac{\mathrm{Cot}A\mathrm{Cot}B - 1}{\mathrm{Cot}B + \mathrm{Cot}A}$$

$$\mathrm{Cot}(A-B) = \frac{\mathrm{Cot}A\mathrm{Cot}B + 1}{\mathrm{Cot}B - \mathrm{Cot}A}$$

$$\mathrm{Sin}2A = 2\mathrm{Sin}A\mathrm{Cos}A$$
$$\mathrm{Cos}2A = \mathrm{Cos}^2A - \mathrm{Sin}^2A = 2\mathrm{Cos}^2A - 1 = 1 - 2\mathrm{Sin}^2A$$

$$\mathrm{Tan}2A = \frac{2\mathrm{Tan}A}{1 - \mathrm{Tan}^2A}$$

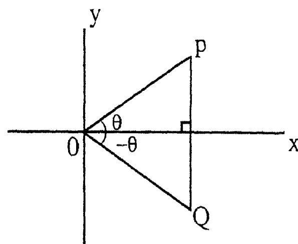
* **θ విలువ 0^0-90^0 ల మధ్య మారుతున్నప్పుడు $\left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$ త్రికోణమితి నిష్పత్తుల విలువలు :**

త్రికోణమితి నిష్పత్తి \ కోణం $=\theta$	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
$\mathrm{Sin}\,\theta$	0	$1/2$	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1
$\mathrm{Cos}\,\theta$	1	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$	0
$\mathrm{Tan}\,\theta$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\mathrm{Csc}\,\theta$	∞	2	$\sqrt{2}$	$2/\sqrt{3}$	1
$\mathrm{Sec}\,\theta$	1	$2/\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2	∞
$\mathrm{Cot}\,\theta$	∞	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$	0

* క్రమ బహుభుజికి n భుజములు ఉన్నప్పుడు, దాని ప్రతి భుజము కేంద్రము వద్ద చేయు కోణము $\theta = \frac{360^0}{n}$.

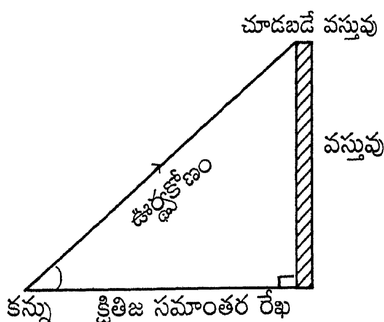
($-\theta$) కోణ విలువలకు అనురూప త్రికోణమితియ నిష్పత్తుల విలువలు :

$Sin(-\ \ ) = -Sin\theta$
$Cos(-\theta) = Cos\theta$
$Tan(-\theta) = -Tan\theta$
$Csc(-\theta) = -Csc\theta$
$Sec(-\theta) = Sec\theta$
$Cot(-\theta) = -Cot\theta$

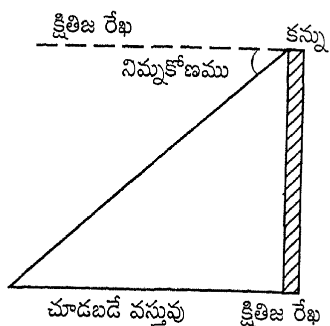


త్రికోణమితి నిష్పత్తి \ కోణం=θ	90°- θ	90°+ θ	180°- θ	180°+ θ	270°- θ	270°+ θ	360°-θ	360°+θ
Sinθ	Cosθ	Cosθ	Sinθ	-Sinθ	-Cosθ	-Cosθ	-Sinθ	Sinθ
Cosθ	Sinθ	-Sinθ	-Cosθ	-Cosθ	-Sinθ	Sinθ	Cosθ	Cosθ
Tanθ	Cotθ	-Cotθ	-Tanθ	Tanθ	Cotθ	-Cotθ	-Tanθ	Tanθ
Cscθ	Secθ	Secθ	Cscθ	-Cscθ	-Secθ	-Secθ	-Cscθ	Cscθ
Secθ	Cscθ	-Cscθ	-Secθ	-Secθ	-Cscθ	Cscθ	Secθ	Secθ
Cotθ	Tanθ	-Tanθ	-Cotθ	Cotθ	Tanθ	-Tanθ	-Cotθ	Cotθ

ఊర్ధ్వ కోణము (Angle of Elevation) : చూడబడే వస్తువు, పరిశీలకుని కన్ను కంటే ఎక్కువ ఎత్తులో ఉన్నప్పుడు పరిశీలకుని కన్ను (దృష్టి) గుండా గీచిన క్షితిజ సమాంతర రేఖకు, పరిశీలకుని కంటిని, వస్తువును కలిపే సరళరేఖకూ మధ్యనున్న కోణాన్ని "ఊర్ధ్వకోణము" అంటారు.



నిమ్నకోణము (Angle of Depression) : చూడబడే వస్తువు, పరిశీలకుని కన్ను కంటే తక్కువ ఎత్తులో ఉన్నప్పుడు, పరిశీలకుని కంటి (దృష్టి) గుండా గీచిన క్షితిజ సమాంతర రేఖకూ, పరిశీలకుని కంటిని; వస్తువును కలిపే సరళరేఖకూ మధ్యనున్న కోణాన్ని "నిమ్నకోణం" అంటారు.



* * *

39. 1 నుండి 20 వరకు ఎక్కముల పట్టిక

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	112	119	126	133	140
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	128	136	144	152	160
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144	153	162	171	180
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
11	11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165	176	187	198	209	220
12	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180	192	204	216	228	240
13	13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169	182	195	208	221	234	247	260
14	14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210	224	238	252	266	280
15	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180	195	210	225	240	255	270	285	300
16	16	32	48	64	80	96	112	128	144	160	176	192	208	224	240	256	272	288	304	320
17	17	34	51	68	85	102	119	136	153	170	187	204	221	238	255	272	289	306	323	340
18	18	36	54	72	90	108	126	144	162	180	198	216	234	252	270	288	306	324	342	360
19	19	38	57	76	95	114	133	152	171	190	209	228	247	266	285	304	323	342	361	380
20	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300	320	340	360	380	400

40. గుర్తులు (Symbols)

$+$ కూడిక, ప్లస్ (Plus)

$-$ తీసివేత, మైనస్ (Minus)

$\times$ గుణకారం, ఇన్‌టు (Into)

$\div$ భాగాహారం, డివైడ్ (Divide)

$\pm$ ప్లస్ లేదా మైనస్ (Plus or Minus)

$=$ ఈజ్ ఈక్వల్ టు సమానం (Is equal to)

$\neq$ ఈజ్ నాట్ ఈక్వల్ టు; సమానం కాదు (Is not equal to)

$\equiv$ ఐడెంటికల్లీ ఈక్వల్ టు;సర్వసమానం (Identically equal to)

||| సిమిలర్; సరూపము (Similar)

: ఈజ్‌టు, నిష్పత్తి (Isto)

:: ఈజ్ యాజ్ (Is as)

$\because$ బికాజ్ ఆఫ్ సిన్స్; కారణము (Because of Since)

$\therefore$ దేర్‌ఫోర్; అందువలన (Therefore)

etc ఎట్‌సెట్రా; వగైరా (Exetra)

W ఎప్రాక్సిమేట్‌లీ ఇంచుమించు; సమానము (Approximately)

$>$ గ్రేటర్‌దెన్; పెద్దది (Greater Than)

$\geq$ గ్రేటర్ దెన్ ఆర్ ఈక్వల్ టు; పెద్దది లేక సమానం (Greaterthan or equal to)

$\not>$ నాట్ గ్రేటర్ దెన్; పెద్దది కాదు (Not Greater than)

$<$ లెస్‌దెన్; చిన్నది (Less Than)

$\leq$ లెస్‌దెన్ ఆర్ ఈక్వల్ టు; చిన్నది లేక సమానము (Less than or equal to)

$\not<$ నాట్ లెస్‌దెన్, చిన్నది కాదు (Not Less Than)

$\parallel$ ప్యార్‌లెల్ టు; సమాంతరము (Parallel to)

$\perp$ పర్‌పెండిక్యూలర్ టు; లంబము (Perpendicular to)

| మాడ్యులస్; మాపము (Modulus)

$\angle$ ఏంగిల్; కోణము (Angle)

∟	రైట్ ఏంగిల్; లంబకోణము (Right Angle)
$\llcorner$	అబ్ట్యూస్ ఏంగిల్; గురుకోణము (Obtuse Angle)
$\angle$	అక్యూట్ ఏంగిల్; అల్పకోణము (Acute Angle)
Δ	ట్రై ఏంగిల్; త్రిభుజము (Triangle)
.	పైంట్; బిందువు (Point)
^{0}	డిగ్రీ (Degree)
%	పర్సెంట్; శాతము (Per cent)
∞	ఇన్ఫినిటి అనంతము (Infinity)
Σ	సిగ్మా; మొత్తము (Sigma)
$\sqrt{}$	స్క్వేర్ రూట్; వర్గమూలము (Square Root)
$\sqrt[n]{}$	ఎన్త్రూట్; nవ మూలము (nth Root)
α	ఈజ్ ప్రపోర్షనల్ టు; అనుపాతము (Is proportional to)
$\in$	బిలాంగ్స్ టు; చెందును (Belongs to)
$\notin$	నాట్ బిలాంగ్స్ టు; చెందదు (Not Belongs to)
$\subseteq$	సబ్సెట్; ఉపసమితి (Sub set)
$\subset$	ప్రాపర్ సబ్సెట్; శుద్ధ ఉపసమితి (Proper Subset)
$\supset$	సూపర్ సెట్; ఉన్నత సమితి (Super Set)
{}	సెట్; సమితి (Set)
ϕ	ఎమ్టీ సెట్; శూన్య సమితి (Empty Set)
μ	మ్యూ; విశ్వసమితి (Mue)
$\cup$	యూనియన్; సమ్మేళనము (Union)
$\cap$	ఇంటర్ సెక్షన్; ఛేదనము (Inter Section)
$\wedge$	కన్జన్క్షన్; సముచ్ఛయము (Conjunction)
	అండ్; మరియు (and)
$\vee$	డిస్జన్క్షన్; వైకల్పికము (Disjunction)
	ఆర్; లేదా (or)
~	నెగెషన్; వ్యతిరేకత (Negation)
P(A)	పవర్ సెట్; ఘాత సమితి (Power Set)
$\Rightarrow$	ఇంప్లైస్; అనుషంగికము (Implies)

$\Leftrightarrow$	ఇంప్లైస్ అండ్ ఇంప్లైడ్ బై; ద్విముఖానుషంగికము (Implies and Implied by)
$\forall$	యూనివర్‌సెల్ క్వాన్‌టి ఫైర్; సార్వత్రిక పరిమాపకము (Universal Quantifier)
$\exists$	ఎక్సిస్‌టెన్షియల్ క్వాంటి ఫైర్; అస్థిత్వ పరిమాపకము (Existential quantifier)
$\forall$	ఫర్ఆల్; అన్ని (For All)
$\exists$	ఫర్‌సమ్; కొన్ని (For Some)
$-$	లైన్ సిగ్మెంట్; రేఖాఖండము (Line Segment)
$\rightarrow$	రే; కిరణము (Ray)
$\leftrightarrow$	స్ట్రేయిట్ లైన్; సరళరేఖ (Straight Line)
!	ఫ్యాక్టోరియల్ (Factorial)
α	ఆల్ఫా (Alpha)
β	బీటా (Beeta)
γ	గామా (Gamm)
π	పై (Pie)
ρ	రో (Rho)
σ	సిగ్మా (Sigma)
ω	ఒమెగా (Omega)
μ	మ్యూ (mu)
θ	తీటా (Tita)
Δ	డెల్టా (Delta)
ϕ	ఫై (Phi)
λ	లామ్డా (Lamda)
$\square$	స్క్వేర్; చతురస్రము (Square)
▭	రెక్టాంగిల్; దీర్ఘ చతురస్రము (Rectangle)
▱	పారలిల్లోగ్రామ్; సమాంతర చతుర్భుజం (Parallelogram)
$\odot$le	సర్కిల్; వృత్తము (Circle)
$\odot$ce	సర్‌కంఫరెన్స్; వృత్తపరిధి (Circumference)

′ అడుగు లేదా నిమిషము (Feet or Minute)

″ అంగుళం లేదా సెకండు (Inch or Second)

mm. మిల్లీమీటర్ (Milli metre)

cm. సెంటీ మీటర్ (Centi metre)

km. కిలో మీటర్ (Kilo Metre)

m. మీటర్ (Metre)

lt. లీటర్ (Liter)

c.c. ఘనపు సెంటీమీటర్ (Cubic Centimetre)

sq.cm. చదరపు సెంటీమీటర్ (Square Centimetre)

sq.m. చదరపు మీటర్ (Square Metre)

Rs. రూపాయలు (Rupees)

N సహజ సంఖ్యాసమితి (Set of Natural Numbers)

R వాస్తవ సంఖ్యాసమితి (Set of Real Numbers)

R^- రుణవాస్తవ సంఖ్యాసమితి (Set of Negative Real Numbers)

R^+ ధనవాస్తవ సంఖ్యాసమితి (Set of Positive Real Numbers)

R^* శూన్యేతర వాస్తవ సంఖ్యాసమితి (Set of Non Zero Real Numbers)

Z పూర్ణ సంఖ్యలసమితి (Set of Integers)

Z^- రుణపూర్ణ సంఖ్యల సమితి (Set of Negative Integers)

Z^+ ధనపుర్ణ సంఖ్యల సమితి (Set of Positive Integers)

Z^* శూన్యేతర పూర్ణ సంఖ్యాసమితి **(Set of Non Zero Integers)**

Z_n {0, 1, 2, 3,............n}

Q అకరణీయ సంఖ్యాసమితి (Set of Rational Numbers)

Q ధన అకరణీయ సంఖ్యాసమితి (Set of Positive Rational Numbers)

Q^+ ఋణ అకరణీయ సంఖ్యాసమితి (Set of Negative Rational Numbers)

Q శున్యేతర అకరణీయ సంఖ్య సమితి (Set of Non Zero Rational Numbers)

C సంకీర్ణసంఖ్యా సమితి (Set of Complex Numbers)

W పూర్ణాంకాల సమితి (Set of Whole Numbers)

( ) ఓపెన్ బ్రాకెట్ (Small Bracket / Open Bracket)

[ ] స్క్వేర్ బ్రాకెట్ (Square Bracket)

— లైన్ బ్రాకెట్ (Line Bracket)

{ } ఫ్లవర్ బ్రాకెట్ (Flower Bracket)

41. దశాంశ గుణిజాలు
(Multiples of Decimals)

ఉపసర్గ	సంకేతం	విలువ	ఉపసర్గ	సంకేతం	విలువ
డెకా	da	10	డెసీ	d	10^{-1}
హెక్టా	h	10^{2}	సెంటీ	c	10^{-2}
కిలో	K	10^{3}	మిల్లీ	m	10^{-3}
మెగా	M	10^{6}	మైక్రో	μ	10^{-6}
గిగా	G	10^{9}	నానో	n	10^{-9}
తేరా	T	10^{12}	పైకో	p	10^{-12}

42. వివిధ రకముల మానములు
(Different Types of Measurements)

(a) దైర్ఘ్య (దూర) మానము (Measurement of Length) :

10 మిల్లీమీటర్లు	=	1 సెంటీ మీటరు
10 సెంటీ మీటర్లు	=	1 డెసీ మీటరు
10 డెసీ మీటర్లు	=	1 మీటరు
10 మీటర్లు	=	1 డెకా మీటరు
10 డెకా మీటర్లు	=	1 హెక్టా మీటరు
10 హెక్టా మీటర్లు	=	1 కిలో మీటరు

గమనిక :

- ☆ 1 సెం.మీ. = $\frac{2}{3}$(0.3937) అంగుళములు
- ☆ 1 మీటరు = 39.37 అంగుళములు
- ☆ 1 మీటరు = 100 సెం.మీ.
- ☆ 1 కిలోమీటరు = 1000 మీటర్లు
- ☆ 1 కిలో మీటరు = N మైళ్ళు అనగా 8 కిలోమీటర్లు=5 మైళ్ళు
- ☆ 1 అంగుళము = 2.54 సెం.మీ.
- ☆ 1 గజము = 0.914 మీ.
- ☆ 1 మైలు = 1.609 కి.మీ.
- ☆ 1 ఎకరం = 0.4047 హెక్టారు
- ☆ 1 హెక్టారు = 2.471 ఎకరాలు

(b) **కోల (ద్రవ) మానము** (Measure of Capacity) :

10 మిల్లీ లీటర్లు	=	1 సెంటీ లీటరు
10 సెంటీ లీటర్లు	=	1 డెస్సీ లీటరు
10 డెస్సీ లీటర్లు	=	1 లీటరు
10 లీటర్లు	=	1 డెకా లీటరు
10 డెకా లీటర్లు	=	1 హెక్టా లీటరు
10 హెక్టా లీటర్లు	=	1 కిలో లీటరు

గమనిక :

- ♦ 1 లీటరు = 1000 మిల్లీ లీటరు
- ♦ 1 లీటరు = $1\frac{3}{4}$ పైంట్లు
- ♦ 1 గాలను = $4\frac{1}{2}$ లీటర్లు

(c) **తుల మానము** (Measure of Weight) :

10 మిల్లీ గ్రాములు	=	1 సెంటీగ్రాము
10 సెంటీ గ్రాములు	=	1 డెసీగ్రాము
10 డెసి గ్రాములు	=	1 గ్రాము
10 గ్రాములు	=	1 డెకా గ్రాము
10 డెకా గ్రాములు	=	1 హెక్టాగ్రాము
10 హెక్టా గ్రాములు	=	1 కిలోగ్రాము
100 కిలో గ్రాములు	=	1 క్వింటాల్
10 క్వింటాళ్ళు	=	1 టన్ను

గమనిక :

☆ 1 కిలో గ్రాము	=	1000 గ్రాములు
☆ 1 టన్ను	=	1000 కిలో గ్రాములు
☆ 1 కిలో గ్రాము	=	2.2 పౌనులు
☆ 1 పౌను	=	454 గ్రాములు
☆ 1 కిలో గ్రాము	=	86 తులములు
☆ 1 తులము	=	11.664 గ్రాములు

(d) **వస్తువుల లెక్క** (Measure of Items) :

2 వస్తువులు	=	1 జత
12 వస్తువులు	=	1 డజను
12 డజనులు	=	1 గ్రోసు
20 వస్తువులు	=	1 స్కోరు
24 కాగితములు	=	1 దస్తా
20 దస్తాలు	=	1 రీము
480 కాగితాలు	=	1 రీము

(e) **కాలము కొలత** (Measure of Time) :

60 సెకండ్లు	=	1 నిమిషము
60 నిమిషములు	=	1 గంట
24 గంటలు	=	1 రోజు
7 రోజులు	=	1 వారము
15 రోజులు	=	1 పక్షము
28 లేదా 29 లేదా 30 లేదా 31 రోజులు	=	1 నెల (మాసము)
12 నెలలు	=	1 సంవత్సరము
365 రోజులు	=	1 సంవత్సరము
366 రోజులు	=	1 లీపు సంవత్సరము
10 సంవత్సరాలు	=	1 దశాబ్ది
100 సంవత్సరాలు	=	1 శతాబ్ది
1000 సంవత్సరాలు	=	సహస్రాబ్ది
25 సంవత్సరములు	=	రజత వర్షము (సిల్వర్ జూబ్లీ)
50 సంవత్సరములు	=	స్వర్ణ వర్షము (గోల్డెన్ జూబ్లీ)
60 సంవత్సరములు	=	వజ్ర వర్షము (డైమండ్ జూబ్లీ)
75 సంవత్సరములు	=	అమృత వర్షము (ప్లాటినమ్ జూబ్లీ)
100 సంవత్సరములు	=	శతవర్షము

* * *

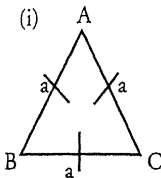
43. వర్గములు; ఘనములు; వర్గమూలములు; ఘనమూలములు

(Squares; Cubes; Square Roots; Cube Roots)

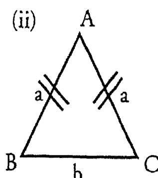
సంఖ్య	వర్గములు	ఘనములు	వర్గమూలం	ఘనమూలం
1	1	1	1.000	1.000
2	4	8	1.414	1.260
3	9	27	1.732	1.442
4	16	64	2.000	1.587
5	25	125	2.236	1.710
6	36	216	2.449	1.817
7	49	343	2.646	1.913
8	64	512	2.828	2.000
9	81	729	3.000	2.080
10	100	1000	3.162	2.154
11	121	1331	3.317	2.224
12	144	1728	3.464	2.289
13	169	2197	3.606	2.351
14	196	2744	3.742	2.410
15	225	3375	3.873	2.466
16	256	4096	4.000	2.520
17	289	4913	4.123	2.571
18	324	5832	4.243	2.621
19	361	6859	4.359	2.668
20	400	8000	4.472	2.714

44. గణిత పటాలు
(Mathematical Figures)

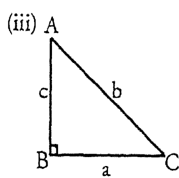
త్రిభుజ రకాలు (Types of Triangles) :



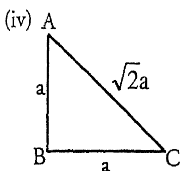
(సమబాహు త్రిభుజము)



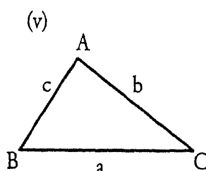
(సమద్విబాహు త్రిభుజము)



(లంబకోణ త్రిభుజము)

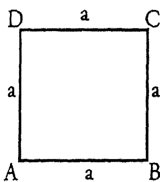


(లంబకోణ సమద్విబాహు త్రిభుజము)

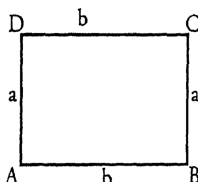


(విషమబాహు త్రిభుజము)

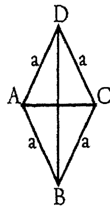
చతుర్భుజాల రకాలు (Types of Quadrilaterals) :



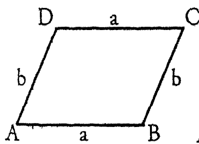
(చతురస్రము)



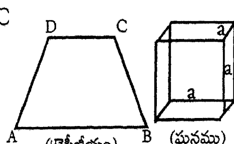
(దీర్ఘ చతురస్రము)



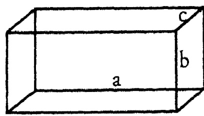
(రాంబస్)



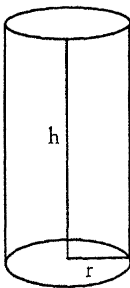
(సమాంతర చతుర్భుజము)



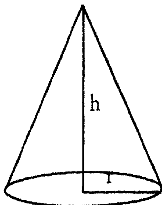
(ట్రెపీజియం) (ఘనము)



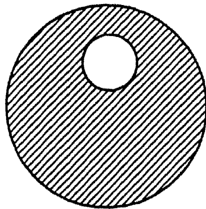
(దీర్ఘ ఘనము)



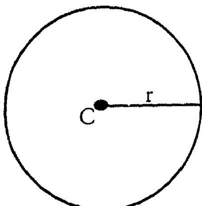
(స్థూపము)



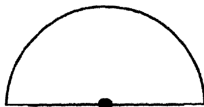
(శంఖువు)



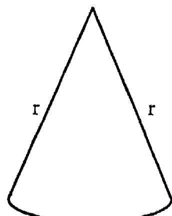
(గోళము)



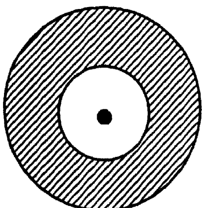
(వృత్తము)



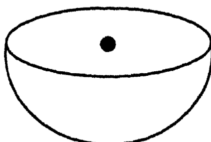
2 d 0
(అర్ధవృత్తము)



(సెక్టారు)



(కంకణము)



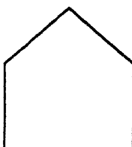
(అర్ధగోళము)



(పరావలయము)



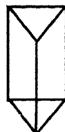
(దీర్ఘ వృత్తము)



(పంచభుజి)



(షడ్భుజి)



(త్రిభుజ పట్టకము)

45 (a). సంవర్గమాన పట్టికలు
(Logarithmic Tables)

											Mean Differences								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	1	1	1	2	2	2
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	1	1	1	2	2	2
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	1	1	1	2	2	2
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	1	1	1	2	2	2
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	1	1	2	2	2	2
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	1	1	2	2	2	2
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	1	1	2	2	2	2
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	1	1	2	2	2	2
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	1	1	2	2	2	3
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	1	1	2	2	2	3
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3161	3201	2	4	6	1	1	2	2	2	3
21	3222	3243	3203	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	1	2	2	2	2	3
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	1	2	2	2	2	3
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	1	2	2	2	3	3
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	1	2	2	2	3	3
25	4771	3997	4041	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	1	2	2	2	3	3
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	1	2	2	2	3	3
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	1	2	2	2	3	3
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	1	2	2	2	3	3
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	1	2	2	3	3	3
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	1	2	2	3	3	3
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	2	2	2	3	3	3
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	2	2	2	3	3	3
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	2	2	2	3	3	4
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	2	2	2	3	3	4
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	2	2	2	3	3	4
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	2	2	3	3	3	4
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	2	2	3	3	3	4
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	2	2	3	3	4	4
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	2	2	3	3	4	4
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	2	2	3	3	4	4
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	2	2	3	3	4	4
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	2	2	3	3	4	4
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	9395	6405	6415	6425	1	2	3	2	2	3	3	4	4
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	9493	6503	6513	6522	1	2	3	2	2	3	4	4	5
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	9590	6599	6609	6618	1	2	3	2	2	3	4	4	5
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	2	2	3	4	4	5
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	2	2	3	4	4	5
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	2	2	3	4	4	5
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	2	2	3	4	5	5
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	2	2	4	4	5	5
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	2	2	4	4	5	5
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	2	2	4	4	5	6
53	7243	7251	7259	7267	9275	7284	7292	7300	7308	7316	1	1	2	2	2	4	4	5	6
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	1	2	2	2	4	4	5	6

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences 1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	1	2	2	2	4	5	5	6
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	1	2	2	2	4	5	5	6
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	1	2	2	2	4	5	5	6
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7688	7694	7701	1	1	2	2	2	4	5	6	6
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	2	2	4	5	6	6
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7822	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	9555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8397	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	9651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8715	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9235	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
80	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9653	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

45 (b). ప్రతిసంవర్గమాన పట్టికలు
(Antilogarithmic Tables)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
12	1348	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
14	1380	1383	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1	1	2	2	2	3	4	4	5
35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1	1	2	2	2	3	4	4	5
.36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	2	2	2	3	4	4	5
37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	2	2	2	3	4	4	5
38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	2	3	4	4	5
39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	2	3	4	5	5
.40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1	1	2	2	2	4	4	5	5
41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1	1	2	2	2	4	4	5	5
42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	2	2	2	4	4	5	6
.43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	2	2	2	4	4	5	6
.44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	2	2	2	4	4	5	6
.45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	2	2	2	4	5	5	6
46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1	1	2	2	2	4	5	5	6
47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	2	2	4	5	5	6
48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	2	2	4	5	6	6
49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	2	2	4	5	6	6

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences 1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
67	4677	4688	4690	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
.70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
.71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
72	5248	5260	5212	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5356	1	2	4	5	6	7	9	10	11
.73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
.76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
.77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
.78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
.79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
.81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
.82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
.84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7223	2	3	5	7	8	10	12	13	15
86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
.88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
.91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
.92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
.93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20

45 (c). సహజసైన్ పట్టికలు
(Natural Sines Tables)

	0′ 0.0°	6′ 0.1°	12′ 0.2°	18′ 0.3°	24′ 0.4°	30′ 0.5°	36′ 0.6°	42′ 0.7°	48′ 0.8°	54′ 0.9°	Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′
0°	0.0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	3	6	9	12	15
1	0.0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	3	6	9	12	15
2	0.0349	0366	0384	0401	0419	0436	0454	0471	0488	0506	3	6	9	12	15
3	0.0523	0541	0558	0576	0593	0610	0628	0645	0663	0680	3	6	9	12	15
4	0.0698	0715	0732	0750	0767	0785	0802	0819	0837	0854	3	6	9	12	15
5	0.0872	0889	0906	0924	0941	0958	0976	0993	1011	1028	3	6	9	12	14
6	0.1045	1063	1080	1097	1115	1132	1149	1167	1184	1201	3	6	9	12	14
7	0.1219	1236	1253	1271	1288	1305	1323	1340	1357	1374	3	6	9	12	14
8	0.1392	1409	1426	1444	1461	1478	1495	1513	1530	1547	3	6	9	12	14
9	0.1564	1582	1599	1616	1633	1650	1668	1685	1702	1719	3	6	9	12	14
10°	0.1736	1754	1771	1788	1805	1822	1840	1857	1874	1891	3	6	9	11	14
11	0.1908	1925	1942	1959	1977	1994	2011	2028	2045	2062	3	6	9	11	14
12	0.2079	2096	2113	2130	2147	2164	2181	2198	2215	2233	3	6	9	11	14
13	0.2250	2267	2284	2300	2317	2334	2351	2368	2385	2402	3	6	8	11	14
14	0.2419	2436	2453	2470	2487	2504	2521	2538	2554	2571	3	6	8	11	14
15	0.2588	2605	2622	2639	2656	2672	2689	2706	2723	2740	3	6	8	11	14
16	0.2756	2773	2790	2807	2823	2840	2857	2874	2890	2907	3	6	8	11	14
17	0.2924	2940	2957	2974	2990	3007	3024	3040	3057	3074	3	6	8	11	14
18	0.3090	3107	3123	3140	3156	3173	3190	3206	3223	3239	3	6	8	11	14
19	0.3256	3272	3289	3305	3322	3338	3355	3371	3387	3404	3	5	8	11	14
20°	0.3420	3437	3453	3469	3486	3502	3518	3535	3551	3567	3	5	8	11	14
21	0.3584	3600	3616	3633	3649	3665	3681	3697	3714	3730	3	5	8	11	14
22	0.3746	3762	3778	3795	3811	3827	3843	3859	3875	3891	3	5	8	11	14
23	0.3907	3963	3939	3955	3971	3987	4003	4019	4035	4051	3	5	8	11	14
24	0.4067	4083	4099	4115	4131	4147	4163	4179	4195	4210	3	5	8	11	13
25	0.4226	4242	4258	4274	4289	4305	4321	4337	4352	4368	3	5	8	11	13
26	0.4384	4399	4415	4431	4446	4462	4478	4493	4509	4524	3	5	8	10	13
27	0.4540	4555	4571	4586	4602	4617	4633	4648	4664	4679	3	5	8	10	13
28	0.4695	4710	4726	4741	4756	4772	4787	4802	4818	4833	3	5	8	10	13
29	0.4848	4863	4879	4894	4909	4924	4939	4955	4970	4985	3	5	8	10	13
30°	0.5000	5015	5030	5045	5060	5075	5090	5105	5120	5135	3	5	8	10	13
31	0.5150	5165	5180	5195	5210	5225	5240	5255	5270	5284	2	5	7	10	12
32	0.5299	5314	5329	5344	5358	5375	5388	5402	5417	5432	2	5	7	10	12
33	0.5446	5461	5476	5490	5505	5519	5534	5543	5563	5577	2	5	7	10	12
34	0.5592	5606	5621	5635	5650	5664	5678	5693	5707	5721	2	5	7	10	12
35	0.5736	5750	5764	5779	5793	5807	5821	5835	5850	5864	2	5	7	9	12
36	0.5878	5892	5906	5920	5934	5948	5962	5976	5990	6004	2	5	7	9	12
37	0.6018	6032	6046	6060	6074	6088	6101	6115	6129	6143	2	5	7	9	12
38	0.6157	6170	6184	6198	6211	6225	6239	6252	6266	6280	2	5	7	9	11
39	0.6293	6307	6320	6334	6347	6361	6374	6388	6401	6414	2	4	7	9	11
40°	0.6428	6441	6455	6468	6481	6494	6508	6521	6534	6547	2	4	7	9	11
41	0.6561	6574	6587	6600	6613	6626	6639	6652	6665	6678	2	4	7	9	11
42	0.6691	6704	6717	6730	6743	6756	6769	6782	6794	6807	2	4	6	9	11
43	0.6820	6833	6845	6858	6871	6884	6896	6909	6921	6934	2	4	6	8	11
44	0.6947	6959	6972	6984	6997	7009	7022	7034	7046	7059	2	4	6	8	10

	0′ 0.0°	6′ 0.1°	12′ 0.2°	18′ 0.3°	24′ 0.4°	30′ 0.5°	36′ 0.6°	42′ 0.7°	48′ 0.8°	54′ 0.9°	Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′
45°	0.7071	7083	7096	7108	7120	7133	7145	7157	7169	7181	2	4	6	8	10
46	0.7193	7206	7218	7230	7242	7254	7266	7278	7290	7302	2	4	6	8	10
47	0.7314	7325	7337	7349	7361	7373	7385	7396	7408	7420	2	4	6	8	10
48	0.7431	7443	7455	7466	7478	7490	7501	7513	7524	7536	2	4	6	8	10
49	0.7547	7559	7570	7581	7593	7604	7615	7627	7638	7649	2	4	6	8	9
50	0.7660	7672	7683	7694	7705	7716	7727	7738	7749	7760	2	4	6	7	9
51	0.7771	7782	7793	7804	7815	7826	7837	7848	7859	7869	2	4	5	7	9
52	0.7880	7891	7902	7912	7923	7934	7944	7955	7965	7976	2	4	5	7	9
53	0.7986	7997	8007	8018	8028	8039	8049	8059	8070	8080	2	3	5	7	9
54	0.8090	8100	8111	8121	8131	8141	8151	8161	7817	8181	2	3	5	7	8
55	0.8192	8202	8211	8221	8231	8241	8251	8261	8271	8281	2	3	5	7	8
56	0.8290	8300	8310	8320	8329	8339	8348	8358	8368	8377	2	3	5	6	8
57	0.8387	8396	8406	8415	8425	8434	8443	8453	8462	8471	2	3	5	6	8
58	0.8480	8490	8499	8508	8517	8526	8536	8545	8554	8563	2	3	5	6	8
59	0.8572	8581	8590	8599	8607	8616	8625	8634	8643	8652	1	3	4	6	7
60°	0.8660	8669	8678	8686	8695	8704	8712	8721	8729	8738	1	3	4	6	7
61	0.8746	8755	8763	8771	8780	8788	8796	8805	8813	8821	1	3	4	6	7
62	0.8829	8838	8846	8854	8862	8870	8878	8886	8894	8902	1	3	4	5	7
63	0.8910	8918	8926	8934	8942	8949	8957	8965	8973	8980	1	3	4	5	6
64	0.8988	8996	9003	9011	9018	9026	9033	9041	9048	9056	1	3	4	5	6
65	0.9063	9070	9078	9085	9092	9100	9107	9114	9121	9128	1	2	4	5	6
66	0.9135	9143	9150	9157	9165	9171	9178	9184	9191	9198	1	2	3	5	6
67	0.9205	9212	9219	9225	9232	9239	9245	9252	9259	9265	1	2	3	4	6
68	0.9272	9278	9285	9291	9298	9304	9311	9317	9323	9330	1	2	3	4	5
69	0.9336	9342	9348	9354	9361	9367	9373	9379	9385	9391	1	2	3	4	5
70°	0.9397	9403	9409	9415	9421	9426	9432	9438	9444	9449	1	2	3	4	5
71	0.9455	9461	9466	9472	9478	9483	9489	9494	9500	9505	1	2	3	4	5
72	0.9511	9516	9521	9527	9532	9537	9542	9548	9553	9558	1	2	3	3	4
73	0.9563	9568	9573	9578	9583	9588	9593	9598	9306	9608	1	2	2	3	4
74	0.9613	9617	9622	9627	9632	9636	9641	9646	9650	9655	1	2	2	3	4
75	0.9659	9664	9668	9673	9677	9681	9686	9690	9694	9699	1	1	2	3	4
76	0.9703	9707	9711	9715	9720	9724	9728	9732	9736	9740	1	1	2	3	3
77	0.9744	9748	9751	9755	9759	9763	9767	9770	9774	9778	1	1	2	3	3
78	0.9781	9785	9789	9792	9796	9799	9803	9806	9810	9813	1	1	2	2	3
79	0.9816	9820	9823	9826	9829	9833	9836	9839	9842	9845	1	1	2	2	3
80°	0.9848	9851	9854	9857	9860	9863	9866	9869	9871	9874	0	1	1	2	2
81	0.9877	9880	9882	9885	9888	9890	9893	9895	9898	9900	0	1	1	2	2
82	0.9903	9905	9907	9910	9912	9914	9917	9919	9921	9923	0	1	1	2	2
83	0.9925	9928	9930	9932	9934	9936	9938	9940	9942	9943	0	1	1	1	2
84	0.9945	9947	9949	9951	9952	9954	9956	9957	9959	9960	0	1	1	1	2
85	0.9962	9963	9965	9966	9968	9969	9971	9972	9973	9974	0	0	1	1	1
86	0.9976	9977	9978	9979	9980	9981	9982	9983	9984	9985	0	0	1	1	1
87	0.9986	9987	9988	9989	9990	9990	9991	9992	9993	9993	0	0	0	1	1
88	0.9994	9995	9995	9996	9996	9997	9997	9997	9998	9998	0	0	0	0	0
89	0.9998	9999	9999	9999	9999	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0	0	0	0	0

45 (d). సహజ కోసైన్ పట్టికలు (Natural Cosines Tables)

	0' 0.0°	6' 0.1°	12' 0.2°	18' 0.3°	24' 0.4°	30' 0.5°	36' 0.6°	42' 0.7°	48' 0.8°	54' 0.9°	Mean Differences 1'	2'	3'	4'	5'
0°	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	9999	9999	9999	9999	0	0	0	0	0
1	0.9998	9998	9998	9997	9997	9997	9996	9996	9995	9995	0	0	0	1	0
2	0.9994	9993	9993	9992	9991	9990	9992	9989	9988	9987	0	0	0	1	1
3	0.9986	9985	9984	9983	9982	9981	9980	9979	9978	9977	0	0	1	1	1
4	0.9976	9974	9973	9972	9971	9969	9968	9966	9965	9963	0	0	1	1	1
5	0.9962	9960	9959	9957	9956	9954	9952	9951	9949	9947	0	1	1	1	2
6	0.9945	9943	9942	9940	9938	9936	9934	9932	9930	9928	0	1	1	1	2
7	0.9925	9923	9921	9919	9917	9914	9912	9910	9907	9905	0	1	1	2	2
8	0.9903	9900	9898	9895	9893	9890	9888	9888	9882	9880	0	1	1	2	2
9	0.9877	9874	9871	9869	9866	9863	9860	9857	9854	9851	0	1	1	2	2
10°	0.9848	9845	9842	9839	9836	9833	9829	9826	9823	9820	1	1	2	2	3
11	0.9816	9813	9810	9806	9803	9799	9796	9792	9789	9785	1	1	2	2	3
12	0.9781	9778	9774	9770	9767	9763	9759	9755	9751	9748	1	1	2	2	3
13	0.9744	9740	9736	9732	9728	9724	9720	9715	9711	9707	1	1	2	2	3
14	0.9703	9699	9694	9690	9686	9681	9677	9673	9668	9664	1	1	2	3	4
15	0.9659	9655	9650	9646	9641	9636	9632	9627	9622	9617	1	2	2	3	4
16	0.9613	9608	9603	9598	9593	9588	9583	9578	9573	9568	1	2	2	3	4
17	0.9563	9558	9553	9548	9542	9537	9532	9527	9521	9516	1	2	3	3	4
18	0.9511	9505	9500	9494	9489	9483	9478	9472	9466	9461	1	2	3	4	5
19	0.9455	9449	9444	9438	9432	9426	9421	9415	9409	9403	1	2	3	4	5
20°	0.9397	9391	9385	9379	9373	9367	9361	9354	9348	9342	1	2	3	4	5
21	0.9336	9330	9323	9317	9311	9304	9298	9291	9285	9278	1	2	2	4	5
22	0.9272	9265	9259	9252	9245	9239	9232	9225	9219	9212	1	2	3	4	6
23	0.9205	9198	9191	9184	9178	9171	9164	9157	9150	9143	1	2	3	5	6
24	0.9135	9128	9181	9***	9107	9100	9092	9085	9078	9070	1	2	3	5	6
25	0.9063	9056	9048	****	9033	9026	9018	9011	9003	8996	1	3	3	5	6
26	0.8983	8980	8973	8965	8957	8949	8942	8934	8926	8918	1	3	3	5	6
27	0.8910	8902	8894	8886	8878	8870	8862	8854	8846	8838	1	3	3	5	7
28	0.8829	8821	8813	8805	8796	8788	8780	8771	8763	8755	1	3	3	5	7
29	0.8746	8738	8729	8721	8712	8704	8695	8686	8678	8669	1	3	4	6	7
30°	0.8660	8652	8643	8634	8625	8616	8607	8599	8590	8581	1	3	4	6	7
31	0.8572	8563	8554	8545	8536	8526	8517	8508	8499	8490	2	3	4	6	8
32	0.8480	8471	8462	8453	8443	8434	8425	8415	8406	8396	2	3	4	6	8
33	0.8387	8377	8368	8358	8348	8339	8329	8320	8310	8300	2	3	4	6	8
34	0.8290	8281	8271	8261	8251	8241	8231	8221	8211	8202	2	3	4	7	8
35	0.8192	8181	8171	8161	8151	8141	8131	8121	8111	8100	2	3	4	7	8
36	0.8090	8080	8070	8059	8049	8039	8028	8018	8007	7997	2	3	5	7	9
37	0.7986	7976	7965	7955	7944	7934	7923	7912	7902	7891	2	4	5	7	9
38	0.7880	7869	7859	7848	7837	7826	7815	7804	7793	7782	2	4	5	7	9
39	0.7771	7760	7749	7738	7727	7716	7705	7694	7683	7672	2	4	6	7	9
40°	0.7660	7649	7638	7627	7615	7604	7593	7581	7570	7559	2	4	6	8	9
41	0.7547	7536	7524	7513	7501	7490	7478	7466	7455	7443	2	4	6	8	10
42	0.7431	7420	7408	7396	7385	7373	7361	7349	7337	7325	2	4	6	8	10
43	0.7314	7302	7290	7278	7266	7254	7242	7230	7218	7206	2	4	6	8	10
44	0.7193	7181	7169	7157	8145	7133	7120	7108	7096	7083	2	4	6	8	10

	0' 0 0°	6' 0 1°	12' 0 2°	18' 0 3°	24' 0 4°	30' 0 5°	36' 0 6°	42' 0 7°	48' 0 8°	54' 0 9°	Mean Differences				
											1'	2'	3'	4'	5'
45°	0.7071	7059	7046	7034	7022	7009	6997	6984	6972	6959	2	4	6	8	10
46	0 6017	6934	6921	6909	6896	6884	6871	6858	6845	6833	2	4	6	8	11
47	0 6820	6307	6794	6782	6769	6756	6743	6730	6717	6704	2	4	6	9	11
48	0.6691	6678	6665	6652	6639	6626	6613	6600	6587	6574	2	4	7	9	11
49	0 6561	6547	6534	6521	6508	6494	6481	6468	6455	6441	2	4	7	9	11
50	0.6428	6414	6401	6388	6374	6361	6347	6334	6320	6307	2	4	7	9	11
51	0.6293	6280	6266	6252	6239	6225	6211	6198	6184	6170	2	5	7	9	11
52	0.6157	6143	6129	6115	6101	6088	6074	6060	6046	6032	2	5	7	9	12
53	0 6018	6004	5990	5976	5967	5948	5934	5920	5906	5892	2	5	7	9	12
54	0 5878	5864	5850	5835	5821	5807	5793	5779	5764	5750	2	5	7	9	12
55	0.5738	5721	5707	5693	5678	5664	5650	5635	5621	5606	2	5	7	10	12
56	0 5592	5577	5563	5548	5534	5519	5505	5490	5476	5461	2	5	7	10	12
57	0.5446	5432	5417	5402	5388	5373	5358	5344	5329	5314	2	5	7	10	12
58	0.5299	5284	5270	5255	5240	5225	5210	5195	5180	5165	2	5	7	10	12
59	0 5150	5135	5120	5105	5090	5075	5060	5045	5030	5015	3	5	8	10	13
60°	0 5000	4985	4970	4955	4939	4924	4909	4894	4879	4863	3	5	8	10	13
61	0.4848	4833	4818	4802	4787	4772	4756	4741	4726	4710	3	5	8	10	13
62	0.4695	4679	4664	4648	4633	4617	4602	4586	4571	4555	3	5	8	10	13
63	0.4540	4524	4509	4493	4478	4462	4446	4431	4415	4399	3	5	8	10	13
64	0 4384	4368	4352	4337	4321	4305	4289	4274	4258	4242	3	5	8	11	13
65	0.4226	4210	4195	4179	4163	4147	4131	4115	4099	4083	3	5	8	11	13
66	0 4067	4054	4035	4019	4003	3987	3971	3955	3939	3923	3	5	8	11	14
67	0 3907	3891	3875	3859	3843	3827	3811	3795	3778	3762	3	5	8	11	14
68	0.3746	3730	3714	3697	3681	3665	3649	3633	3616	3600	3	5	8	11	14
69	0 3584	3567	3551	3535	3518	3502	3486	3469	3453	3437	3	5	8	11	14
70°	0.3420	3404	3387	3371	3355	3338	3322	3305	3289	3272	3	5	8	11	14
71	0.3256	3239	3223	3206	3190	3173	3156	3140	3123	3107	3	6	8	11	14
72	0.3090	3074	3057	3040	3024	3007	2990	2974	2957	2940	3	6	8	11	14
73	0.2924	2907	2890	2874	2857	2840	2823	2807	2790	2773	3	6	8	11	14
74	0.2756	2740	2723	2706	2689	2672	2656	2639	2622	2605	3	6	8	11	14
75	0.2588	2571	2554	2538	2521	2504	2487	2470	2453	2436	3	6	8	11	14
76	0 2419	2402	2385	2368	2351	2334	2317	2300	2284	2267	3	6	8	11	14
77	0.2250	2233	2215	2198	2181	2364	2147	2130	2113	2096	3	6	9	11	14
78	0.2079	2062	2045	2028	2011	1994	1977	1959	1942	1925	3	6	9	11	14
79	0.1908	1891	1874	1857	1840	1822	1805	1788	1771	1754	3	6	9	11	14
80°	0.1736	1719	1702	1685	1668	1650	1633	1616	1599	1582	3	6	9	12	14
81	0.1564	1547	1530	1513	1495	1478	1461	1444	1426	1409	3	6	9	12	14
82	0.1392	1374	1357	1340	1323	1305	1288	1271	1253	1236	3	6	9	12	14
83	0 1219	1201	1184	1167	1149	1132	1115	1097	1080	1063	3	6	9	12	14
84	0 1045	1028	1011	0993	0976	0958	0941	0924	0906	0889	3	6	9	12	14
85	0.0872	0854	0837	0819	0802	0783	0767	0750	0732	0715	3	6	9	12	14
86	0.0698	0680	0663	0645	0628	0640	0593	0576	0558	0541	3	6	9	12	15
87	0 0523	0506	0488	0471	0454	0436	0419	0401	0384	0366	3	6	9	12	15
88	0 0349	0332	0314	0297	0279	0262	0244	0227	0209	0192	3	6	9	12	15
89	0 0175	0157	0140	0122	0105	0087	0703	0052	0035	0017	3	6	9	12	15

45 (e). సహజ టాంజెంట్ పట్టికలు
(Natural Tangents Tables)

	0' 0.0°	6' 0.1°	12' 0.2°	18' 0.3°	24' 0.4°	30' 0.5°	36' 0.6°	42' 0.7°	48' 0.8°	54' 0.9°	Mean Differences 1'	2'	3'	4'	5'
0°	0.0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	3	6	9	12	15
1	0.0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	3	6	9	12	15
2	0.0349	0367	0384	0402	0419	0437	0454	0472	0489	0507	3	6	9	12	15
3	0.0524	0542	0559	0577	0594	0612	0629	0647	0664	0682	3	6	9	12	15
4	0.0699	0717	0734	0752	0769	0787	0805	0822	0840	0857	3	6	9	12	15
5	0.0875	0892	0910	0928	0945	0963	0981	0998	1016	1033	3	6	9	12	15
6	0.1051	1069	1086	1104	1122	1139	1157	1175	1192	1210	3	6	9	12	15
7	0.1228	1246	1263	1281	1299	1317	1334	1352	1370	1388	3	6	9	12	15
8	0.1405	1423	1441	1459	1477	1495	1512	1530	1548	1566	3	6	9	12	15
9	0.1584	1602	1620	1638	1655	1673	1691	1709	1727	1745	3	6	9	12	15
10°	0.1763	1781	1799	1817	1835	1853	1871	1890	1908	1926	3	6	9	12	15
11	0.1944	1962	1980	1998	2016	2035	2053	2071	2089	2107	3	6	9	12	15
12	0.2126	2144	2162	2180	2199	2217	2235	2254	2272	2290	3	6	9	12	15
13	0.2306	2327	2345	2364	2382	2401	2419	2438	2456	2475	3	6	9	12	15
14	0.2493	2512	2530	2549	2568	2586	2605	2623	2642	2661	3	6	9	12	16
15	0.2679	2698	2717	2736	2754	2773	2792	2811	2830	2849	3	6	9	13	16
16	0.2867	2886	2905	2924	2943	2962	2981	3000	3019	3038	3	6	9	13	16
17	0.3057	3076	3096	3115	3134	3153	3172	3191	3211	3230	3	6	10	13	16
18	0.3249	3269	3288	3307	3327	3346	3365	3385	3404	3424	3	6	10	13	16
19	0.3443	3463	3482	3502	3522	3541	3561	3581	3600	3620	3	7	10	13	16
20°	0.3640	3659	3679	3699	3719	3739	3759	3779	3799	3819	3	7	10	13	17
21	0.3839	3859	3879	3899	3919	3939	3959	3979	4000	4020	3	7	10	13	17
22	0.4040	4061	4081	4101	4122	4142	4163	4183	4204	4224	3	7	10	14	17
23	0.4245	4265	4286	4307	4327	4348	4369	4390	4411	4431	3	7	10	14	17
24	0.4452	4473	4494	4515	4536	4557	4578	4599	4621	4642	4	7	11	14	18
25	0.4663	4684	4706	4727	4748	4770	4791	4813	4834	4856	4	7	11	14	18
26	0.4877	4899	4921	4942	4964	4986	5008	5029	5051	5073	4	7	11	15	18
27	0.5095	5117	5139	5161	5184	5206	5228	5250	5272	5295	4	7	11	15	18
28	0.5317	5340	5362	5384	5407	5430	5452	5475	5498	5520	4	8	11	15	19
29	0.5543	5566	5589	5612	5635	5658	5681	5704	5727	5750	4	8	12	15	19
30°	0.5774	5797	5820	5844	5867	5890	5914	5938	5901	5985	4	8	12	16	20
31	0.6009	6032	6056	6080	6104	6128	6152	6176	6200	6224	4	8	12	16	20
32	0.6249	6273	6297	6322	6346	6371	6395	6420	6445	6469	4	8	12	16	20
33	0.6494	6519	6544	6569	6594	6619	6644	6669	6694	6720	4	8	13	17	21
34	0.6745	6771	6796	6822	6847	6873	6899	6924	6950	6976	4	9	13	17	21
35	0.7002	7028	7054	7080	7107	7133	7159	7186	7212	7239	4	9	13	18	22
36	0.7265	7292	7319	7346	7373	7400	7427	7454	7481	7508	5	9	14	18	23
37	0.7536	7563	7590	7618	7646	7673	7701	7729	7757	7785	5	9	14	18	23
38	0.7813	7841	7869	7898	7926	7954	7983	8012	8040	8069	5	9	14	19	24
39	0.8098	8127	8156	8185	8214	8243	8273	8302	8332	8361	5	10	15	20	24
40°	0.8391	8421	8451	8481	8511	8541	8571	8601	8632	8662	5	10	15	20	25
41	0.8693	8724	8754	8785	8816	8847	8878	8910	8941	8972	5	10	16	21	26
42	0.9004	9036	9067	9099	9131	9163	9195	9228	9260	9293	5	11	16	21	27
43	0.9325	9358	9391	9424	9457	9490	9523	9556	9590	9623	6	11	17	22	28
44	0.9657	9091	9725	9759	9793	9827	9861	9896	9930	9965	6	11	17	23	29

	0' 0 0°	6' 0 1°	12' 0 2°	18' 0 3°	24' 0 4°	30' 0 5°	36' 0 6°	42' 0 7°	48' 0 8°	54' 0 9°	Mean Differences 1'	 2'	 3'	 4'	 5'
45°	1 0000	0035	0070	0105	0141	0176	0212	0247	0283	0319	6	12	18	24	30
46	1 0355	0392	0428	0464	0501	0538	0575	0612	0649	0686	6	12	18	25	31
47	1 0724	0761	0799	0837	0875	0913	0951	0990	1028	1067	6	13	19	25	32
48	1.1105	1145	1184	1224	1263	1303	1343	1383	1423	1463	7	13	20	27	33
49	1 1504	1544	1585	1626	1667	1708	1750	1792	1833	1875	7	14	21	28	34
50	1 1918	1960	2002	2045	2088	2131	2174	2218	2261	2305	7	14	22	29	36
51	1 2349	2393	2437	2484	2527	2572	2617	2662	2708	2753	8	15	23	30	38
52	1.2799	2846	2892	2938	2985	3032	3079	3127	3175	3222	8	16	24	31	39
53	1 3270	3319	3367	3416	3465	3514	3564	3613	3663	3713	8	16	25	33	41
54	1 3764	3814	3865	3916	3968	4019	4071	4124	4176	4229	9	17	26	34	43
55	1.4281	4335	4388	4442	4496	4550	4605	4659	4715	4770	9	18	27	36	45
56	1.4828	4882	4938	4994	5051	5108	5166	5224	5282	5340	10	19	29	38	48
57	1 5399	5458	5517	5577	5637	5697	5757	5818	5880	5941	10	20	30	40	50
58	1.6003	6066	6128	6191	6255	6319	6383	6447	6512	6577	11	21	32	43	53
59	1.6643	6709	6775	6842	6909	6977	7045	7113	7182	7251	11	23	34	45	56
60°	1.7321	7391	7461	7532	7603	7675	7747	7820	7893	7966	12	24	36	48	60
61	1.8040	8115	8190	8265	8341	8418	8495	8572	8650	8728	13	26	38	51	64
62	1.8807	6887	8967	9047	9128	9210	9292	9375	9458	9542	14	27	41	55	68
63	1.9626	9711	9797	9883	9970	0057	0145	0233	0323	0413	15	29	44	58	73
64	2.0503	0594	0686	0778	0872	0965	1060	1155	1251	1348	16	31	147	63	78
65	2.1445	1543	1642	1742	1842	1943	2045	2148	2251	2355	17	34	151	68	85
66	2.2460	2566	2673	2781	2889	2998	3109	3220	3332	3445	18	37	55	73	92
67	2.3559	3673	3789	3906	4023	4142	4268	4383	4504	4627	20	40	60	79	99
68	2.4751	4876	5002	5129	5257	5386	5517	5649	5782	5916	22	43	65	87	108
69	2.6051	6187	6325	6464	6605	6746	6889	7034	7179	7326	24	47	71	95	119
70°	2.7475	7625	7276	7929	8083	8239	8397	8556	8716	8878	26	52	78	104	131
71	2.9042	9208	9375	9544	9714	9887	0001	9237	0415	0595	29	58	87	116	145
72	3.0777	0961	1146	1334	1524	1716	1910	2106	2305	2506	32	64	96	129	161
73	3.2709	2914	3122	3332	3544	3759	3977	4197	4420	4646	36	72	108	144	180
74	3.2974	5105	5339	5576	5816	6059	6305	6554	6806	7062	41	81	122	163	204
75	3.7321	7583	7848	8118	8391	8667	8947	9232	9520	9812	46	93	132	186	232
76	4.0108	0408	0713	1022	1335	1653	1976	2303	2635	2972	*Mean Differences no longer sufficiently accurate*				
77	4.3315	3662	4015	4374	4737	5107	5483	5864	6252	6646					
78	4.7046	7453	7867	8288	8716	9152	9594	0045	0504	9970					
79	5.1446	1929	2422	2924	3435	3955	4486	5026	5578	6140					
80°	5.6713	7297	7894	8502	9124	9758	0405	1066	1742	2432					
81	6.3139	3859	4596	5350	6122	6912	7720	8548	9395	0264					
82	7.1154	2066	3002	3962	4947	5958	6996	8062	9158	0285					
83	8 1443	2636	3863	5126	6427	7769	9152	0579	2052	3572					
84	9.514	9677	9 845	10 02	10 20	10 39	10 58	10.78	10 99	11.20					
85	11.43	11 66	11.91	12 16	12.43	12 71	13 00	13 30	13 62	13.95					
86	14.30	14 67	15.06	15.46	15.89	16 35	16 83	17.34	17.89	18.46					
87	19.08	19.74	20 45	21 20	22.02	22.90	23 86	24.90	26 03	27.27					
88	28.64	30.14	31 82	33 69	35 80	38 19	40.92	44 07	47.74	52.08					
89	57.29	63 66	71 62	81.85	95.49	114.6	143 2	191 0	286 5	573.0					